arXiv:math/9901011v2 [math.AG] 12 Oct 2001

Deux composantes du bord de $\mathbf{I}_3$

NICOLAS PERRIN
Université de Versailles
45 avenue des États-Unis
78035 Versailles Cedex
email : perrin@math.uvsq.fr

Introduction

Un instanton E de degré n est un fibré vectoriel stable de rang 2 sur $\mathbb{P}^3$ tel que $c_1(E) = 0$, $c_2(E) = n$ et tel que le groupe $H^1E(-2)$ est nul. La variété $\mathbf{I}_n$ des instantons de degré n est donc un ouvert de l'espace des modules $\mathbf{M}_{\mathbb{P}^3}(0, n, 0)$ des faisceaux sans torsion semi-stables de classes de Chern $(0, n, 0)$. Dans cet article nous nous intéressons au bord de $\mathbf{I}_n$ dans la variété $\mathbf{M}_{\mathbb{P}^3}(0, n, 0)$.

On ne sait décrire ce bord que pour $n = 1$ [Ba] et $n = 2$ [NT]. La variété $\mathbf{I}_3$ est de dimension 21. Elle a été étudiée par G. Ellingsrud et S.A. Strømme [ES1] qui ont prouvé son irréductibilité et par L. Gruson et M. Skiti [GS] qui ont montré qu'elle est birationnelle aux réseaux de quadriques de $\check{\mathbb{P}}^3$. Au vu des résultats de [NT], L. Gruson et G. Trautmann ont conjecturé que le bord de $\mathbf{I}_3$ a huit composantes irréductibles toutes en codimension 1 (voir remarque 7 pour plus de détails sur cette conjecture). Dans [GS], les auteurs mettent également en évidence deux composantes irréductibles du bord de $\mathbf{I}_3$ correspondant à des diviseurs des réseaux de quadriques. Nous donnons ici une généralisation de ces réseaux et décrivons deux nouvelles composantes irréductibles $\partial\mathbf{I}_3^1$ et $\partial\mathbf{I}_3^2$ du bord de la variété des instantons de degré 3 qui sont "symétriques" l'une de l'autre.

Considérons la famille $\partial\mathbf{I}_3^1$ des faisceaux obtenus comme noyau d'une flèche surjective de E'' vers $\theta(2)$ où E'' est un instanton de degré 1 et θ est une théta-caractéristique ayant pour support une conique lisse. Cette famille est contenue dans $M_{\mathbb{P}^3}(0, 3, 0)$. Considérons par ailleurs un ouvert $\mathbf{U}$ (que l'on définira plus loin) de $M_{\mathbb{P}^3}(0, 3, 2)$. Un faisceau général de $\mathbf{U}$ a deux points singuliers. Soit $\mathbf{U}'$ le fermé qui correspond aux faisceaux E'' de $\mathbf{U}$ dont le lieu singulier est un point double, nous montrons alors le théorème suivant :

THÉORÈME. — *(ı) La variété $\partial\mathbf{I}_3^1$ est birationnelle à la variété des surfaces quintiques rationelles réglées autoduales. C'est une composante irréductible de dimension 20 du bord de $\mathbf{I}_3$.*

(ıı) La famille $\mathbf{U}$ est une fibration en $\mathbb{P}^9$ au dessus du schéma des cubiques gauches irréductibles. Le fermé $\mathbf{U}'$ est décrit dans chaque fibre par une hypersurface irréductible de degré 6.

(ııı) Il existe une application rationnelle naturelle, génériquement injective, du fermé $\mathbf{U}'$ dans $M_{\mathbb{P}^3}(0, 3, 0)$ dont l'image $\partial\mathbf{I}_3^2$ est une composante irréductible du bord de $\mathbf{I}_3$. L'application réciproque associe à un faisceau $E \in \partial\mathbf{I}_3^2$ son bidual $E'' \in \mathbf{U}'$.

Pour prouver que ces familles sont adhérentes à la variété des instantons, nous montrons qu'elles peuvent être paramétrées par des diviseurs dans une généralisation des réseaux de

quadriques (paragraphe 1). Cette paramétrisation fait apparaître la symétrie entre $\partial\mathbf{I}_3^1$ et $\partial\mathbf{I}_3^2$.

Dans les deuxième et troisième paragraphes, nous étudions respectivement les familles $\partial\mathbf{I}_3^1$ et $\partial\mathbf{I}_3^2$. Nous décrivons en particulier la géométrie de leurs éléments de saut. Rappelons que l'on appelle plan instable (resp. droite bisauteuse) de $E \in M_{\mathbb{P}^3}(0,3,0)$ tout plan H (resp. toute droite L) tel que $h^0E_H > 0$ (resp. telle que $h^1E_L > 0$). La courbe des plans instables des faisceaux de ces deux composantes est ACM de degré 6 et de genre 3 et la surface réglée recouverte par les droites bisauteuses est soit une quintique rationnelle soit une sextique elliptique. Les éléments de saut des deux composantes sont reliés ce qui traduit la symétrie entre $\partial\mathbf{I}_3^1$ et $\partial\mathbf{I}_3^2$. Elle s'exprime assez simplement en termes de transformations cubo-cubiques (voir paragraphe 1). En effet, une courbe ACM de degré 6 et de genre 3 permet de définir une application birationnelle — appelée transformation cubo-cubique — de $\mathbb{P}^3$ dans lui même. Son application réciproque est encore une transformation cubo-cubique (i.e. associée à une courbe ACM de degré 6 et de genre 3). La *dualité* se traduit par le fait que les transformations cubo-cubiques qui proviennent de $\partial\mathbf{I}_3^2$ sont les inverses de celles de $\partial\mathbf{I}_3^1$.

Dans le troisième paragraphe, nous étudions la famille $\mathbf{U}$ que nous décrivons explicitement ainsi que le fermé $\mathbf{U}'$ et le fermé de $\mathbf{U}$ des faisceaux E'' qui ne sont plus réflexif. Nous donnons alors la courbe qui constitue le lieu singulier de E''.

Enfin dans un dernier paragraphe nous présentons deux situations géométriques remarquables reliées à notre étude. Nous donnons une description birationnelle de l'espace des modules des courbes de degré 7 et de genre 2 d'un espace projectif. Cette description et la formule d'Hürwitz permettent de retrouver le fait que $\mathbf{U}'$ est définie dans les fibres au dessus des cubiques gauches par une hypersurface de degré 6.

Proposition . — *L'espace des modules des courbes de degré 7 et de genre 2 de $\mathbb{P}^3$ est birationnellement isomorphe au quotient par PGL_2 de la variété $\mathbb{G}(2, H^0\mathcal{O}_{S^2\mathbb{P}^1}(3))$ des pinceaux de cubiques du plan $S^2\mathbb{P}^1$.*

Nous exhibons également une famille $\mathfrak{I}$ de dimension 36 d'involutions birationnelles de $\mathbb{P}^3$ dans lui-même. Nous montrons que $\mathfrak{I}$ est birationnelle au schéma de Hilbert $\mathfrak{H}_{9,6}$ des courbes de degré 9 et de genre 6. Nous montrons par ailleurs :

Proposition . — *L'espace des modules des courbes de degré 9 et de genre 6 de $\mathbb{P}^3$ est birationnellement isomorphe au quotient par PGL_2 de la variété $\mathbb{G}(4, H^0\mathcal{O}_{S^2\mathbb{P}^1}(3))$ des sous-espaces vectoriels de dimension 4 de cubiques du plan $S^2\mathbb{P}^1$.*

Remerciements : Je tiens à remercier ici mon directeur de thèse Laurent Gruson pour toute l'aide qu'il m'a apportée durant la préparation de ce travail.

1 Construction et déformation de faisceaux

Dans ce paragraphe nous expliquons comment la suite spectrale de Beilison (voir [OSS]) ramene les problèmes sur les faisceaux à des problèmes d'algèbre linéaire. Nous étudions alors ces questions d'algèbre linéaires et leurs traductions géométriques. En particulier nous construisons ainsi des déformations de faisceaux.

Les transformations cubo-cubiques

Soit R un espace vectoriel de dimension trois, soient V et W deux espaces vectoriels de dimension quatre. Une transformation cubo-cubique est un élément A de $\mathbf{T} = \mathbb{P}(\mathrm{Hom}(R\otimes V, W))$. C'est une application linéaire de R dans $H^0\mathcal{O}_{\mathbb{P}(\check{V})\times\mathbb{P}(W)}(1)$ dont l'image définit une sous-variété Π de $\mathbb{P}(\check{V})\times\mathbb{P}(W)$. La projection p (resp. q) de Π sur $\mathbb{P}(\check{V})$ (resp. $\mathbb{P}(W)$) est pour une transformation cubo-cubique générale l'éclatement de la courbe Y (resp. Y') ACM de degré 6 et de genre 3 donnée par la résolution :

$$0 \longrightarrow R\otimes\mathcal{O}_{\mathbb{P}(\check{V})}(-4) \xrightarrow{A} W\otimes\mathcal{O}_{\mathbb{P}(\check{V})}(-3) \longrightarrow \mathcal{I}_Y \longrightarrow 0$$

respectivement :

$$0 \longrightarrow R\otimes\mathcal{O}_{\mathbb{P}(W)}(-4) \xrightarrow{{}^tA} \check{V}\otimes\mathcal{O}_{\mathbb{P}(W)}(-3) \longrightarrow \mathcal{I}_{Y'} \longrightarrow 0$$

Cette construction décrit une application birationnelle de $\mathbb{P}(\check{V})$ dans $\mathbb{P}(W)$. Si on échange les rôles de $\check{V}$ et de W on a son application réciproque. Nous dirons qu'une transformation cubo-cubique associée à une courbe Y est involutive si il existe un isomorphisme $\alpha : W \longrightarrow \check{V}$ tel que $\alpha(Y') = Y$. La transformation cubo-cubique et son inverse sont alors définies par la même courbe. Pour plus de détails sur les transformations cubo-cubiques voir aussi [RS] p. 179.

Remarque 1. — Le groupe $PGL(R)\times PGL(W)$ agit sur $\mathbf{T}$. Il existe un bon quotient pour cette action qui est fibré principal homogène sous ce groupe sur un ouvert. Par ailleurs, sur l'ouvert des éléments de $\mathbf{T}$ qui définissent une courbe, il existe un morphisme f vers le schéma de Hilbert $\mathfrak{H}_{6,3}$ des courbes ACM de degré 6 et de genre 3 : à A on associe Y. Ce morphisme est sur cet ouvert le bon quotient de T par $PGL(R)\times PGL(W)$ (pour plus de détails voir [ES2]).

Généralisation des réseaux de quadriques

Dans la suite on identifie V à l'espace vectoriel $H^0\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(1)$. Dans [GS], la famille des instantons sans droite trisauteuse est identifiée à un ouvert des réseaux de quadriques de $\check{\mathbb{P}}^3$. Cette identification se fait grâce aux multiplications du module de Rao d'un faisceau $E\in\mathbf{I}_3$: pour un instanton général E, on a $h^1E(-1) = 3$, $h^1E = 4$ et $h^1E(1) = 1$. La multiplication $H^1E\otimes V \longrightarrow H^1E(1)$ est non dégénérée, elle permet d'identifier H^1E à $\check{V}$. La multiplication

$$H^1E(-1)\otimes V \longrightarrow H^1E \simeq \check{V}$$

donne alors le réseau de quadriques.

Nous n'allons plus maintenant identifier directement H^1E à $\check{V}$ mais *garder en mémoire* cette identification par la donnée d'un morphisme (qui est un isomorphisme dans le cas des instantons) de H^1E dans $\check{V}$ et de sa "réciproque" de $\check{V}$ dans H^1E. Les composantes du bord vont apparaître lorsque ces morphismes ne seront plus des isomorphismes. Ainsi pour retrouver E nous aurons besoin d'identifier H^1E (resp. $H^1E(-1)$) à un espace vectoriel W (resp. R) de dimension 4 (resp. 3), d'un morphisme $R \longrightarrow W \otimes \check{V}$ (une transformation cubo-cubique) et de deux morphismes $W \longrightarrow \check{V}$ et $\check{V} \longrightarrow W$ vérifiant les conditions de symétrie suivantes : la composée $R \longrightarrow \check{V} \otimes \check{V}$ (resp. $R \longrightarrow W \otimes W$) se factorise par $S^2\check{V}$ (resp. S^2W). Dans le cas des instantons la première condition traduit le fait que la multiplication dans le module de Rao est associative. Nous faisons intervenir la seconde flèche pour conserver la symétrie : sur l'ouvert des instantons, la flèche de W dans $\check{V}$ est inversible et l'identification nous permet de faire jouer le même rôle à W et $\check{V}$. Nous avons ainsi une flèche de $\check{V}$ dans W (l'inverse de la précédente) telle que la composée $R \longrightarrow W \otimes W$ se factorise par S^2W.

Nous nous donnons donc pour généraliser les réseaux de quadriques trois flèches $R \otimes V \xrightarrow{\varphi} W$, $W \xrightarrow{\psi} \check{V}$ et $\check{V} \xrightarrow{\psi'} W$ qui vérifient les conditions de symétrie précédentes. Considérons ainsi la sous-variété $\mathbf{F}$ de $\mathbf{T} \times \mathbb{P}(\mathrm{Hom}(W, \check{V})) \times \mathbb{P}(\mathrm{Hom}(\check{V}, W))$ formée des triplets (φ, ψ, ψ') tels que les composées :

$$R \otimes V \otimes V \xrightarrow{\varphi \otimes \mathbf{1}_V} W \otimes V \xrightarrow{\psi \otimes \mathbf{1}_V} \check{V} \otimes V \longrightarrow \mathbf{C} \quad \text{et} \quad R \otimes \check{W} \otimes \check{W} \xrightarrow{\varphi \otimes \mathbf{1}_{\check{W}}} \check{V} \otimes \check{W} \xrightarrow{\psi' \otimes \mathbf{1}_{\check{W}}} W \otimes \check{W} \longrightarrow \mathbf{C}$$

se factorisent par $R \otimes S^2V$ et $R \otimes S^2\check{W}$ et tels que :

$$\psi' \circ \psi = \lambda \mathbf{1}_W \quad \text{et} \quad \psi \circ \psi' = \mu \mathbf{1}_{\check{V}}$$

ces dernières conditions viennent de l'identification au niveau des instantons : ψ et ψ' sont dans ce cas inverses l'un de l'autre. En particulier dès que l'un de ces deux morphismes n'est plus inversible les composées doivent être nulles. Nous appellons $\mathbf{F}_{i,j}$ l'image réciproque dans $\mathbf{F}$ du localement fermé de $\mathbb{P}(\mathrm{Hom}(W, \check{V})) \times \mathbb{P}(\mathrm{Hom}(\check{V}, W))$ formé des couples d'applications linéaires (ψ, ψ') de rangs i et j. La dernière condition impose que si $i \neq 4$ alors $j \leq 4 - i$. Un point général de $\mathbf{F}_{i,j}$ pour i fixé différent de 4 est dans $\mathbf{F}_{i,4-i}$ que nous noterons $\mathbf{F}_i$. Notons $\mathbf{F}_4$ l'ouvert sur lequel ψ est inversible.

Lien avec les faisceaux

Un élément de $\mathbf{F}_{i,j}$ nous permet grâce à la condition de symétrie sur ψ de construire un complexe :

$$R \otimes \Omega^2(2) \xrightarrow{\varphi} W \otimes \Omega^1(1) \xrightarrow{\psi} \mathcal{O}_{\mathbb{P}(V)}$$

Sa cohomologie au centre est est élément de $M_{\mathbb{P}^3}(0,3,0)$. Cette construction détermine une application rationnelle g (définie là où φ est injective et ψ surjective) de $\mathbf{F}$ vers $M_{\mathbb{P}^3}(0,3,0)$.

Cette application envoie $\mathbf{F}_4$ dans $\mathbf{I}_3$ et même sur l'ouvert des instantons sans droite trisauteuse (voir [GS]). De plus, deux diviseurs de $\mathbf{F}_4$ font apparaître deux composantes irréductibles du bord de $\mathbf{I}_3$ (cf. [GS]). M. Skiti [Sk] a également montré que $\mathbf{F}_2$ s'envoie sur les instantons à droite

trisauteuse. Nous montrons que $\mathbf{F}_3$ et $\mathbf{F}_1$ permettent d'identifier deux nouvelles composantes du bord de $\mathbf{I}_3$.

En particulier, nous regardons l'image par g de $\mathbf{F}_3$ dans $M_{\mathbb{P}^3}(0,3,0)$ qui sera l'un des deux bords recherchés ($\partial\mathbf{I}_3^1$). Nous étudions les transformations cubo-cubiques associées. Notons $\mathbf{T}_3^1$ l'image de $\mathbf{F}_3$ dans $\mathbf{T}$. La variété $\mathbf{F}_4$ correspond au cas où la transformation cubo-cubique est involutive. Ce n'est plus le cas pour $\mathbf{F}_3$, on a une rupture de symétrie. Les transformations cubo-cubiques inverses de celles de $\mathbf{T}_3^1$ sont celles obtenues comme image de $\mathbf{F}_1$ (proposition 12). Elles nous permettrent de décrire la seconde composante du bord de $\mathbf{I}_3$.

Sur $\mathbf{F}_1$, la seconde flèche du complexe n'est plus surjective et nous avons alors une application rationnelle vers $M_{\mathbb{P}^3}(0,3,2)$. L'application g n'utilise pas la condition de symétrie sur ψ'. Nous pouvons définir g sur le localement fermé $\mathbf{F}^1$ de $\mathbf{T}\times\mathbb{P}(\mathrm{Hom}(W,\check{V}))$ des paires qui vérifient la première condition de symétrie et telles que la seconde flèche est de rang 1. L'application ainsi définie est à valeurs dans un ouvert $\mathbf{U}$ (voir paragraphe 3) de $M_{\mathbb{P}^3}(0,3,2)$. Nous verrons qu'il est dominant. L'image de $\mathbf{F}_1$ dans $\mathbf{F}^1$ est un fermé et son image par g est un fermé $\mathbf{U}'$ (voir paragraphe 3) de codimension 1 de $\mathbf{U}$ (là où le lieu singulier du faisceau est concentré en un point). Nous montrons que la seconde condition de symétrie (sur ψ') nous permet de prolonger ce morphisme vers $M_{\mathbb{P}^3}(0,3,0)$. Son image décrit la seconde composante irréductible $\partial\mathbf{I}_3^2$ du bord de $\mathbf{I}_3$ recherchée.

Remarques 2. — *(i)* La fibre générique du morphisme g est isomorphe à $PGL(R)\times PGL(W)$. En effet, le faisceau obtenu est à cohomologie naturelle. Les multiplications de H^1_*E nous permettent de retrouver φ et ψ. Sur un ouvert rencontrant $\mathbf{F}_4$ et $\mathbf{F}_3$, le morphisme ψ' est uniquement déterminé par les deux autres, la fibre est alors isomorphe à $PGL(R)\times PGL(W)$ (cf. [GS] pour $\mathbf{F}_4$ et proposition 2 pour $\mathbf{F}_3$).

(ii) Les variétés $\mathbf{F}_1$ et $\mathbf{F}_3$ sont isomorphes (il suffit d'échanger les roles de V et W). Par ailleurs, les composantes $\partial\mathbf{I}_3^1$ et $\partial\mathbf{I}_3^2$ du bord de $\mathbf{I}_3$ sont birationnelles au quotient de $\mathbf{F}_3$ et $\mathbf{F}_1$ par $PGL(R)\times PGL(W)$. Ainsi les deux quotients $\partial\mathbf{I}_3^1/PGL(V)$ et $\partial\mathbf{I}_3^2/PGL(V)$ sont birationnels (l'existence de ces deux quotients est assurée au moins sur un ouvert par un théorème de Rosenlicht [Ro]). Ceci est une autre forme de la symétrie entre $\partial\mathbf{I}_3^1$ et $\partial\mathbf{I}_3^2$.

Propriétés de F

Nous donnons ici une démonstration de quelques propriétés de la variété $\mathbf{F}$, des variétés $\mathbf{F}_i$ pour $1\le i\le 4$ et de la variété $\mathbf{F}^1$.

Fait 1. — *Les variétés $\mathbf{F}_i$ pour $1\le i\le 3$ sont irréductibles de dimension 43.*

Démonstration : Soit Z_i l'image de la projection de $\mathbf{F}_i$ vers le produit d'espaces projectifs $\mathbb{P}(\mathrm{Hom}(W,\check{V}))\times\mathbb{P}(\mathrm{Hom}(\check{V},W))$. L'image de la projection de Z_i vers $\mathbb{P}(\mathrm{Hom}(W,\check{V}))$ est la sous-variété irréductible de dimension $15-(4-i)^2$ des morphismes de rang i. La fibre de cette projection au dessus de ψ est alors donnée par $\mathbb{P}((\mathrm{Ker}\psi)\check{} \otimes \mathrm{Coker}\psi)$. La variété Z_i est donc irréductible de dimension 14. Mais alors la fibre au dessus de $(\psi,\psi')\in Z_i$ est donnée par

$\mathbb{P}(R \otimes (S^2\mathrm{Im}\psi \oplus S^2\mathrm{Ker}\psi \oplus (\mathrm{Im}\psi\check{)} \otimes \mathrm{Ker}\psi))$ ainsi $\mathbf{F}_i$ est irréductible de dimension 43.

Fait 2. — *Les variétés $\mathbf{F}_i$ pour $1 \leq i \leq 3$ sont adhérentes à $\mathbf{F}_4$. Les variétés $\mathbf{F}$ et $\mathbf{F}_4$ sont irréductibles de dimension* 44.

Démonstration : Soit (φ, ψ, ψ') un élément de $\mathbf{F}_i$ assez général. On décompose $\check{V}$ et W en $\mathrm{Im}\psi \oplus \mathrm{Coker}\psi$ et $\mathrm{Im}\psi \oplus \mathrm{Ker}\psi$. On peut alors supposer que, dans des bases bien choisies, les applications linéaires φ, ψ et ψ' s'écrivent sous la forme suivante :

$$\begin{pmatrix} A & 0 \\ C & D \end{pmatrix}, \ \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \ \text{et} \ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}$$

où A et D sont symétriques. Si on se place sur un anneau de valuation discrète A d'uniformisante a, et que l'on considère dans les mêmes bases, les morphismes φ_a, ψ_a et ψ'_a donnés par les matrices :

$$\begin{pmatrix} A & a^tC \\ C & D \end{pmatrix}, \ \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & aI \end{pmatrix} \ \text{et} \ \begin{pmatrix} aI & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}$$

alors on voit que pour a inversible le triplet définit un élément de $\mathbf{F}_4$ alors que sa limite est (φ, ψ, ψ'). La variété $\mathbf{F}_4$ est donc un ouvert dense de $\mathbf{F}$. Il suffit donc de montrer son irréductibilité. Soit Z_4 l'image de $\mathbf{F}_4$ dans $\mathbb{P}(\mathrm{Hom}(W, \check{V})) \times \mathbb{P}(\mathrm{Hom}(\check{V}, W))$. Le morphisme de Z_4 dans $\mathbb{P}(\mathrm{Hom}(W, \check{V}))$ est un isomorphisme sur l'ouvert des applications inversibles (sa fibre est donnée par l'inverse). La variété Z_4 est donc irréductible de dimension 15. De plus la fibre au dessus d'un point de Z_4 est donnée par $\mathbb{P}(R \otimes S^2V)$ avec l'identification de W et $\check{V}$ grâce à ψ. La variété $\mathbf{F}_4$ est donc irréductible de dimension 44.

Fait 3. — *Le morphisme de $\mathbf{F}^1$ dans $\mathbf{T}$ est birationnel sur son image.*

Démonstration : Soit $\varphi \in \mathbf{T}$ un élément assez général dans l'image de $\mathbf{F}^1$. Il existe donc un morphisme ψ_0 vérifiant les conditions de symétrie. Dans des bases de $\check{V}$ et W, on peut écrire φ et ψ_0 sous la forme suivante :

$$\begin{pmatrix} A & 0 \\ C & D \end{pmatrix} \ \text{et} \ \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

où A est de taille 1×1 et D de taille 3×3. On cherche tous les morphismes ψ de rang 1 qui vérifient les conditions de symétrie. Un tel morphisme peut s'écrire dans les mêmes bases sous la forme :

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$$

on a alors les équations $\delta D =^t(\delta D)$ et $\gamma A + \delta C =^t(\beta D)$. La première équation est un système linéaire de taille 9×9 et si φ est assez général la seule solution est $\delta = 0$. De la même façon, on voit que l'on a $\beta = 0$ et $\gamma = 0$ pour φ assez général.

Fait 4. — *L'action de $PGL(W) \times PGL(R)$ sur les variétés $\mathbf{F}_i$ pour $1 \leq i \leq 4$ est libre sur un ouvert de chacune de ces variétés.*

Démonstration : Un élément (φ, ψ, ψ') de $\mathbf{F}$ est donné par des matrices :

$$\begin{pmatrix} A & 0 \\ C & D \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}$$

où A et D sont symétriques et A est de taille $i \times i$ si $(\varphi, \psi, \psi') \in \mathbf{F}_i$. Le quotient par $PGL(R)$ consiste à prendre un sous espace de dimension 3 des matrices de la première forme. Cette action est génériquement libre. Un élément h de $PGL(W)$ qui est dans le stabilisateur vérifie $h \circ \varphi = \lambda\varphi$, $\psi \circ h = \mu\psi$ et $h \circ \psi' = \nu\psi'$. Si h est donné par

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$$

alors on a $\alpha = \mu I$, $\beta = 0$, $\delta = \nu I$, $\alpha A = \lambda A$, $\delta D = \lambda D$ et $\gamma A + \delta C = \lambda C$. Ceci nous donne : $\lambda = \mu = \nu$, $\alpha = \lambda I$, $\delta = \lambda I$ et $\gamma A = 0$. Si φ est assez général on a donc $\gamma = 0$ et $h = \lambda I$.

Notations : (I) Nous noterons $\mathbb{G}$ la grassmannienne des droites de $\mathbb{P}^3$ et K (resp. Q) le sous-fibré (resp. le quotient) tautologique sur $\mathbb{G}$. Nous noterons $\mathbb{F}(i,j;4)$ les variétés d'incidences des quotients de rang i et de rang j de V et p et q les projections respectives.

(II) Notons π le morphisme de $\mathbf{F}$ vers $\mathbf{T}$.

2 La famille $\partial\mathbf{I}_3^1$

Considérons la famille $\partial\mathbf{I}_3^1$ contenue dans $M_{\mathbb{P}^3}(0,3,0)$ formée des faisceaux obtenus comme noyaux d'une flèche surjective de E'' vers $\theta(2)$ où E'' est un instanton de degré 1 et θ est une théta-caractéristique sur une conique lisse C. Nous montrons que cette variété forme une famille irréductible de dimension 20 qui est adhérente à $\mathbf{I}_3$. C'est une composante irréductible du bord de $\mathbf{I}_3$ dans $M_{\mathbb{P}^3}(0,3,0)$.

Une composante du bord

Notons b le morphisme de $\partial\mathbf{I}_3^1$ vers $\mathbf{I}_1$ qui à un faisceau E associe son bidual E''. Dans le lemme suivant nous rappelons les propriétés de la variété $\mathbf{I}_1$ des instantons de degré 1.

LEMME 1. — *La variété $\mathbf{I}_1$ est isomorphe à $\mathbb{P}(\Lambda^2\check{V})$ privé de la grassmannienne $\mathbb{G}$: la donnée d'un instanton E'' de degré 1 est équivalente à celle du complexe linéaire non singulier $\mathcal{A}$ des droites de saut de E''.*

Démonstration : Nous nous contenterons de décrire la situation géométrique, pour plus de détails et une démonstration voir [OSS] page 364. La variété $\mathcal{A}$ des droites de saut de E'' est un complexe linéaire non singulier de droites (i.e. la trace dans $\mathbb{G}$ d'un hyperplan de $\mathbb{P}(\Lambda^2 V)$). Il détermine E''. Notons $\mathbf{X}$ l'image réciproque par q de $\mathcal{A}$ dans $\mathbb{F}(1,2;4)$, la variété $\mathbf{X}$ s'identifie à $\mathbb{P}_{\mathbb{P}^3}(E''(1))$ et à $\mathbb{P}_{\mathcal{A}}(Q(1))$.

PROPOSITION 1. — *La fibre de b au dessus d'un complexe de droites $\mathcal{A}$ est birationnellement isomorphe au schéma de Hilbert des courbes rationnelles lisses de degré 5 de $\mathcal{A}$.*

La variété $\partial\mathbf{I}_3^1$ est donc birationnellemement isomorphe à la variété $\mathbf{H}_5^5$ des courbes rationnelles lisses de degré 5 de $\mathbb{G}$ qui sont tracées sur un complexe non singulier de droites.

Démonstration : Soit $E \in \partial\mathbf{I}_3^1$ noyau d'une surjection $E'' \longrightarrow \theta(2)$. Notons C le support de θ. La surface réglée $S = \mathbb{P}_C(E''(1)|_C)$ est incluse dans $\mathbb{F}(1,2;4)$ et même dans $\mathbf{X} = \mathbb{P}_{\mathbb{P}^3}(E''(1))$. La surjection $E''(1)|_C \longrightarrow \theta(3)$ définit une section $\sigma : C \longrightarrow S$ de cette surface. Notons $Z = \sigma(C)$. Pour un faisceau général, la projection de Z dans $\mathcal{A}$ est une immersion fermée d'image une courbe Γ rationnelle lisse de degré 5. De plus, le $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}$-module $Q(1)|_\Gamma$ est isomorphe à $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(2) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(3)$. En effet, il est de degré 5 et la courbe Z nous donne une surjection de $Q(1)|_\Gamma$ vers $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(2)$ (car la projection par p de Z redonne la conique C). La courbe Z est la section de la surface réglée $\mathbb{P}_\Gamma(Q(1)|_\Gamma)$ définie par la flèche surjective $Q(1)|_\Gamma \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(2)$.

Réciproquement, soit Γ une courbe rationnelle lisse de degré 5 dans $\mathcal{A}$. Supposons que Γ est sur un unique complexe de droites et que $Q(1)|_\Gamma$ est isomorphe à $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(2) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(3)$ en tant que $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}$-module (c'est le cas générique pour Γ). Considérons alors la surface réglée (de morphisme la restriction de q) suivante : $\mathbb{P}_\Gamma(Q(1)|_\Gamma)$, elle est incluse dans $\mathbf{X}$. La section donnée par la surjection de $Q|_\Gamma(1)$ vers le facteur $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(2)$ a pour image une courbe Z contenue dans $\mathbf{X}$. Sa projection par p est une conique C (lisse en général). Mais alors la courbe Z est une section de la surface réglée $\mathbb{P}E''(1)|_C$ (car la projection p est un isomorphisme de Z sur C). Cette section correspond à une surjection de $E''(1)|_C$ vers un $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}$-module inversible de degré celui de Γ. On a donc une surjection de $E''|_C$ vers $\theta(2)$ ce qui nous définit l'application réciproque.

En prenant le noyau de la composée $E'' \longrightarrow E''|_C \longrightarrow \theta(2)$, on retrouve le faisceau E.

LEMME 2. — *La variété $\mathbf{H}_5^5$ est irréductible de dimension 20.*

Démonstration : Cette variété correspond aux surfaces quintiques rationnelles réglées autoduales. Elle est irréductibilité de dimension 20 (voir [P2] ou [P3]).

COROLLAIRE 1. — *La variété $\partial\mathbf{I}_3^1$ est irréductible de dimension 20.*

Nous montrons grâce aux réseaux de quadriques que la famille $\partial\mathbf{I}_3^1$ est adhérente à $\mathbf{I}_3$.

PROPOSITION 2. — *La restriction de g à $\mathbf{F}_3$ est dominante sur $\partial\mathbf{I}_3^1$.*

Démonstration : Soit $E \in \partial\mathbf{I}_3^1$ un faisceau à cohomologie naturelle. Nous identifions H^1E à W et $H^1E(-1)$ à R. La première multiplication du module de Rao nous donne une transformation cubo-cubique $\varphi \in \mathbf{T}$. Par ailleurs, la seconde multiplication du module de Rao nous donne un élément $\psi \in \mathbb{P}(\mathrm{Hom}(W,\check{V}))$ qui vérifie la condition de symétrie. De plus nous savons que $H^1E = H^0\theta(2)$ et $H^1E(1) = \mathrm{Coker}(H^0E''(1) \longrightarrow H^0\theta(3))$ donc le morphisme ψ est de rang 3 (la multiplication par l'équation du plan de C est nulle). Prenons alors pour ψ' un morphisme de rang 1 dont le noyau est $\mathrm{Im}\psi$ et l'image est $\mathrm{Ker}\psi$ (ceci revient à choisir un isomorphisme entre $\mathrm{Coker}\psi$ et $\mathrm{Ker}\psi$ qui sont de dimension 1, il n'y a qu'une solution à scalaire près). Ce morphisme vérifie les conditions de symétrie et d'annulation. L'élément (φ,ψ,ψ') est donc dans $\mathbf{F}_3$. Ainsi $g^{-1}(\partial\mathbf{I}_3^1)$ est contenu dans $\mathbf{F}_3$ qui est irréductible de dimension égale à $\dim(g^{-1}(\partial\mathbf{I}_3^1))$ (la fibre générale est $PGL(R) \times PGL(W)$ l'action sur $\mathbf{F}_3$ étant génériquement libre).

Corollaire 2. — *La variété $\partial\mathbf{I}_3^1$ est une composante irréductible du bord de $\mathbf{I}_3$.*

Démonstration : Nous savons [GS] que la restriction de g à $\mathbf{F}_4$ est une application rationnelle dominante sur $\mathbf{I}_3$. Or nous avons vu au fait 2 que $\mathbf{F}_3$ est adhérente à $\mathbf{F}_4$. Son image par g, qui est $\partial\mathbf{I}_3^1$, est donc adhérente à $\mathbf{I}_3$. Dans [P1] nous décrivons $\partial\mathbf{I}_3^1$ comme le diviseur exceptionnel d'un éclatement.

Éléments de saut

Soit $E \in \partial\mathbf{I}_3^1$, nous étudions maintenant les éléments de saut de E.

Proposition 3. — *La variété Y des plans instables de E est une courbe ACM de degré 6 et de genre 3 de $\check{\mathbb{P}}^3$. Elle a un point triple au point correspondant au plan de la conique C.*

Démonstration : La variété d'incidence $\mathbb{F}(1,3;4)$ nous permet de calculer la résolution de l'idéal de la courbe Y des plans instables qui est donné par $R^1q_*p^*E$:

$$0 \longrightarrow R \otimes \mathcal{O}_{\check{\mathbb{P}}^3}(-4) \longrightarrow W \otimes \mathcal{O}_{\check{\mathbb{P}}^3}(-3) \longrightarrow \mathcal{I}_Y \longrightarrow 0$$

où $R = H^1E(-1)$, $W = H^1E$ et la multiplication est donnée par la multiplication du module de Rao de E. La courbe Y est ACM de degré 6 et de genre 3.

De plus, les groupes de cohomologie de E sont définis de la façon suivante :

$$0 \longrightarrow H^0\theta(1) \longrightarrow H^1E(-1) \longrightarrow H^1E''(-1) \longrightarrow 0 \quad \text{et} \quad H^1E = H^0\theta(2)$$

Pour voir que Y a un point triple donné par le plan contenant la conique, nous regardons la matrice A de la multiplication du module de Rao qui définit Y. La multiplication par l'équation H du plan de la conique a un noyau de dimension 2 dans $H^1E(-1)$. Les mineurs 2×2 de la matrice A sont donc contenus dans le noyau de H (vu comme forme linéaire sur $\check{V}$). Ainsi, la courbe Y a un point triple au point de $\check{\mathbb{P}}^3$ dont l'idéal est engendré par le noyau de H.

Si $E \in \partial\mathbf{I}_3^1$, notons Γ la courbe rationnelle quintique tracée sur $\mathbb{G}$ définie à la proposition 1.

Proposition 4. — *La variété des droites bisauteuses de E s'identifie à celle des trisécantes à Y la courbe des plans instables. C'est une courbe de degré 8 réunion de Γ et d'une cubique du plan dual de celui de la conique C.*

La courbe Y est le lieu double de la surface réglée définie par Γ et le lieu triple de celle définie par la courbe des droites bisauteuses.

Démonstration : Une droite L qui passe par le point triple de Y est trisécante à Y (c'est à dire vérifie la condition $h^1\mathcal{I}_Y(1)|_L > 0$) si elle recoupe Y ou est tangente à Y au point triple. Les trisécantes à Y passant par le point triple forment donc une cubique du plan dual de celui de la conique qui correspond à la projection de Y par rapport à son point triple. De façon générale, les trisécantes à Y sont données par le $0^{\text{ième}}$ idéal de Fitting Q de $R^1q_*p^*(\mathcal{I}_Y(1))(1)$ (avec la variété d'incidence $\mathbb{F}(2,3;4)$) qui a la résolution suivante :

$$R \otimes K \longrightarrow W \otimes \mathcal{O}_{\mathbf{G}} \longrightarrow Q \longrightarrow 0$$

Par ailleurs, les bisauteuses de E sont données (grâce à la variété d'incidence $\mathbb{F}(1,2;4)$) par le $0^{\text{ième}}$ idéal de Fitting de $R^1q_*p^*E$ qui a la même résolution. Les droites bisauteuses sont donc les trisécantes à la courbe Y des plans instables.

Les droites bisauteuses sont données par le support du conoyau de la flèche suivante : $q_*p^*E'' \longrightarrow q_*p^*\theta(2)$. Par définition de E'', en dehors du plan des droites coupant la conique en deux points, ce support est exactement l'image de la section de $\mathbb{P}_C(E'')$ définie par la surjection $E'' \longrightarrow \theta(2)$. La courbe Γ est donc le lieu des trisécantes à Y qui ne passent pas par le point triple. La seconde composante du lieu des droites bisauteuses est alors donnée par les trisécantes qui passent par le point triple, c'est la projection de Y à partir de son point triple. C'est une cubique du plan des droites du plan de C.

Il reste à déterminer le lieu singulier des surfaces réglées. Or si H est un plan stable, nous avons la suite exacte

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_H \longrightarrow E_H(1) \longrightarrow \mathcal{I}_Z(2) \longrightarrow 0$$

où Z est de longueur 4. Une droite de H est bisauteuse si elle passe par trois points de Z. Il en existe donc au plus une et les plans stables ne sont pas dans le lieu singulier. Si H est instable nous avons la suite exacte

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_H \longrightarrow E_H \longrightarrow \mathcal{I}_Z \longrightarrow 0$$

avec Z de longueur 3. Les trois droites passant par deux des points de Z sont alors bisauteuses. Les plans instables forment donc le lieu triple de la surface réglée des bisauteuses. De plus, une de ces droites est contenue dans le plan de C (car deux des trois points de Z sont sur la conique) et les deux autres sont sur la surface réglée qui correspond à Γ.

Remarque 3. — Notons $\mathfrak{H}_{6,3}^t$ (resp. $\mathfrak{H}_{6,3}^1$) le fermé de $\mathfrak{H}_{6.3}$ (resp. de $\mathfrak{H}_{6,3}^t$) des courbes ayant un point triple (resp. dont la courbe des trisécantes est tracée sur un complexe linéaire de droites). Les variétés $\partial\mathbf{I}_3^1$, $\mathbf{H}_5^5$ et $\mathfrak{H}_{6,3}^1$ sont birationnelles et irréductibles. Les morphismes de $\partial\mathbf{I}_3^1$ vers $\mathbf{H}_5^5$ et $\mathfrak{H}_{6,3}^1$ sont donnés respectivement par les droites bisauteuses et les plans instables d'un faisceau. Les morphismes entre $\mathbf{H}_5^5$ et $\mathfrak{H}_{6,3}^1$ sont donnés dans un sens par le lieu double de la surface et dans l'autre par le lieu des trisécantes ne passant pas par le point triple. Cette dernière correspondance birationnelle est décrite plus en détails dans [P2].

3 La famille $\partial\mathbf{I}_3^2$

Nous étudions un ouvert $\mathbf{U}$ de l'espace $M_{\mathbb{P}^3}(0,3,2)$ qui paramétrise les faisceaux de rang 2 sans torsion semi-stables et de classes de chern $c_1 = 0$, $c_2 = 3$ et $c_3 = 2$ de $\mathbb{P}^3$. Nous montrons que la donnée d'un faisceau E'' dans $\mathbf{U}$ est équivalente à celle de la surface formée par la réunion de ses droites bisauteuses et nous décrivons géométriquement les surfaces ainsi obtenues.

Exemple 1. — Soit Y une courbe de degré 7 et de genre 2 assez générale (notamment lisse et irréductible) et ξ un élément non nul de $\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}}(\mathcal{I}_Y(4), \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3})$. Il définit une extension dont le terme central est un faisceau $E''(2)$. Le faisceau E'' est réflexif (voir [Ha2]) et $E'' \in M_{\mathbb{P}^3}(0,3,2)$.

De plus pour Y assez générale, ces faisceaux sont à cohomologie minimale en degrés variant de -2 à 1. Ils forment donc un ouvert dans $M_{\mathbb{P}^3}(0,3,2)$.

Soit $\mathbf{U}_0$ l'ouvert de $M_{\mathbb{P}^3}(0,3,2)$ (qui contient les faisceaux de l'exemple) des faisceaux E'' tels que la cohomologie de $E''(-2)$, $E''(-1)$, E'' et $E''(1)$ est naturelle, c'est à dire qu'au plus un groupe de cohomologie est non nul. On a alors $h^2E''(-2) = 1$, $h^1E(-1) = 2$, $h^1E = 3$ et tous les groupes de cohomologie de $E(1)$ sont nuls. Cet ouvert $\mathbf{U}_0$ contient des faisceaux réflexifs et des faisceaux sans torsion. Nous décrirons les sous-variétés correspondantes et le lieu singulier des faisceaux sans torsion. Soit E'' dans $\mathbf{U}_0$ et considérons la suite spectrale de Beilinson associée à $E''(1)$ (voir par exemple [OSS]) : $E_1^{p,q} = H^qE''(p+1) \otimes \Omega^{-p}(p) \Rightarrow E''(1)$. Nous en déduisons les deux suites exactes :

$$0 \longrightarrow H^1E''(-1) \otimes \Omega^2(2) \longrightarrow H^1E'' \otimes \Omega^1(1) \longrightarrow F \longrightarrow 0 \quad (1)$$

$$0 \longrightarrow H^2E''(-2) \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(-1) \longrightarrow F \longrightarrow E''(1) \longrightarrow 0$$

Remarques 4. — *(ı)* Soit $\mathbf{W}$ la variété des faisceaux F obtenus grâce à une suite exacte du type de (1). Nous montrons (proposition 5) qu'elle est birationnelle au schéma de Hilbert $\mathfrak{H}_{3,0}$ des cubiques gauches irréductibles. La fibre du morphisme de $\mathbf{U}_0$ vers $\mathbf{W}$ au dessus de F est un ouvert de $\mathbb{P}(H^0F(1)\check{)})$ (là où la section est injective). En effet, si $E''(2)$ est le conoyau d'une section de $F(1)$, alors E'' a la cohomologie souhaitée.

(ıı) Si E'' est réflexif, alors le faisceau F est localement libre. En effet, soit Z, le lieu d'annulation de la section de $F(1)$, nous avons la suite exacte

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_Z(1) \longrightarrow \underline{\mathbf{Ext}}^1(E''(1), \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}) \longrightarrow \underline{\mathbf{Ext}}^1(F, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}) \longrightarrow 0$$

le schéma Z est nécessairement de codimension 3 et dans ce cas sa longueur est donnée par $c_3(F)$ qui vaut ici 2. Or $\underline{\mathbf{Ext}}^1(E''(1), \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3})$ est aussi de longueur 2 (sa longueur est $c_3(E'')$ voir [Ha2]) et nous voyons que la première flèche est un isomorphisme donc le dernier terme de la suite exacte est nul et F est localement libre.

Etude des éléments de saut

Dans la proposition suivante, le faisceau F est donné par un faisceau $E'' \in \mathbf{U}_0$.

Proposition 5. — *La variété des plans instables de E'' est une cubique gauche C de $\check{\mathbb{P}}^3$. Si C est irréductible, le dual de F est un fibré de Schwarzenberger associé à C.*

Démonstration : Les plans instables de E'' sont évidement ceux de $F(-1)$. Les formules de Bott et la suite exacte (1) montrent que pour tout plan H le groupe $H^2F_H(-1)$ est nul. Les plans instables sont donc les plans H qui vérifient la condition $h^1F_H(-1) > 1$. La variété des plans instables est donnée par le premier idéal de Fitting du faisceau $R^1q_*p^*F_{\mathbb{F}(1,3;4)}(0,-1)$ qui admet la résolution suivante :

$$0 \longrightarrow H^1F(-2) \otimes \mathcal{O}_{\check{\mathbb{P}}^3}(-1) \xrightarrow{M} H^1F(-1) \otimes \mathcal{O}_{\check{\mathbb{P}}^3} \longrightarrow R^1q_*p^*F_{\mathbb{F}(1,3;4)}(0,-1) \longrightarrow 0$$

Mais on a $H^1F(-2) = H^1E(-1)$ et $H^1F(-1) = H^1E$ qui sont de dimensions respectives 2 et 3. Ce premier idéal de Fitting est une cubique gauche sauf si les mineurs de M ont un facteur commun. C'est alors un plan ou une quadrique. Dans ce cas la flèche de $\Omega^2(2)^2$ dans $\Omega^1(1)^3$ qui définit F n'est plus injective ce qui ne peut se produire. Le faisceau F est complètement déterminé par cette courbe (elle détermine la suite exacte (1)).

Six cas sont possibles si la cubique n'est pas irréductible (en excluant les matrices qui donnent des surfaces) : la courbe est réunion d'une conique et d'une droite se coupant en un point ou une chaine de trois droites ou trois droites concourantes non coplanaires ou une droite double et une droite non contenue dans son plan qui la recoupe ou une droite triple dans un cône quadratique ou enfin une droite triple donnée par le carré de l'idéal d'une droite (pour la description de ces courbes, voir [R]). Le faisceau F général obtenu dans le cas où C dégénère est alors sans torsion de lieu singulier contenant une droite. L'espace vectoriel $H^0F(1)$ est toujours de dimension 10 et les faisceaux E'' obtenus sont sans torsion et leur lieu singulier contient une droite. Ces faisceaux forment un fermé de codimension 1 de $\mathbf{U}_0$.

Nous nous plaçons dans toute la suite sur l'ouvert $\mathbf{U}$ de $\mathbf{U}_0$ formé des faisceaux dont la courbe des plans instables est une cubique gauche irréductible. Cette cubique est isomorphe à $\mathbb{P}^1$. Notons alors S_n la représentation irréductible de dimension $n+1$ de SL_2. Dans ce cas, le faisceau $\check{F}(1)$ est un fibré de Steiner : on a une résolution

$$0 \longrightarrow \mathbb{C}^2 \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(-1) \xrightarrow{u} \mathbb{C}^5 \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3} \longrightarrow \check{F}(1) \longrightarrow 0$$

et les plans instables de $F(-1)$ sont donnés par C. Les résultats de [V] nous permettent de dire que $\check{F}(1)$ est un fibré de Schwarzenberger associé à C. Les espaces vectoriels $\mathbb{C}^2$ et $\mathbb{C}^5$ s'identifient alors à S_1 et S_4.

Rappelons que l'on se place maintenant sur l'ouvert $\mathbf{U}$ de $\mathbf{U}_0$ formé des faisceaux dont la courbe des plans instables est une cubique gauche irréductible. Nous étudions maintenant la fibre du morphisme de $\mathbf{U}$ dans $\mathbf{W}$ au dessus de F, c'est à dire aux sections de $F(1)$.

Remarques 5. — *(ı)* L'espace vectoriel $H^0F(1)$ est isomorphe à S^2S_3 en tant que SL_2-module. L'espace vectoriel $\check{V}$ est isomorphe à S_3. Ainsi, nous avons l'identification $\Lambda^2 V = \Lambda^2 S_3 = S^2 S_2$ (voir [FH]). La variété des bisécantes à C décrit le plongement de Veronese v de $\mathbb{P}^2 = \mathbb{P}(S_2)$ dans $\mathbb{G} \subset \mathbb{P}(\Lambda^2 V)$ d'image $\mathcal{V}$.

Dans $\mathbb{P}(S_2)$ nous avons une conique canonique C_0 dont l'image $v(C_0)$ dans $\mathcal{V}$ est la courbe des tangentes à C. La donnée de $s \in S^2S_3 = S^3S_2$ (loi de réciprocité de Hermite, voir [FH]) correspond à la donnée d'une cubique X de $\mathbb{P}(S_2)$. La courbe $v(X)$ est alors elliptique de degré 6 sur $\mathcal{V}$. Cette courbe définit une surface réglée sextique elliptique S dont le modèle non singulier est donné par la restriction du quotient tautologique Q de la grassmanienne à $v(X)$. Le modèle non singulier de la surface duale $\check{S}$ est donné par la restriction de $\check{K}$ à $v(X)$.

(ıı) Nous déterminons (proposition 10) les conditions nécessaires et suffisantes sur l'élément de S^2S_3 (la section de $F(-1)$) pour que le faisceau E'' soit réflexif.

Proposition 6. — *La variété des droites de saut de $F(-1)$ s'identifie à la Véronese $\mathcal{V}$ des bisécantes à C.*

Démonstration : La variété d'incidence permet de montrer que les droites sauteuses sont données par le support du faisceau $R^1q_*p^*F_{\mathbb{F}(1,2;4)}(0,-1)$ dont on a une présentation :

$$H^1F(-2)\otimes K \xrightarrow{\alpha} H^1F(-1)\otimes\mathcal{O}_{\mathbf{G}} \longrightarrow R^1q_*p^*F_{\mathbb{F}(1,2;4)}(0,-1)\longrightarrow 0$$

Par ailleurs, les bisécantes à C sont données (cf. [GP]) par le support du faisceau R^1q_*J où J est l'idéal de $p^{-1}C$ dans $\mathbb{F}(2,3;4)$. Or ce faisceau admet la résolution suivante : $S_1\otimes\mathcal{O}_{\mathbb{F}(2,3;4)}(-3)\longrightarrow S_2\otimes\mathcal{O}_{\mathbb{F}(2,3;4)}(-2)\longrightarrow J\longrightarrow 0$ qui nous donne la présentation

$$S_1\otimes K(-1)\xrightarrow{\beta} S_2\otimes\mathcal{O}_{\mathbf{G}}(-1)\longrightarrow R^1q_*J\longrightarrow 0$$

Les flèches $\beta(1)$ et α sont égales et les deux faisceaux ont donc le même idéal de Fitting.

Cette étude nous permet d'identifier le faisceau $R^1q_*p^*F_{\mathbf{F}(1,2;4)}(0,-1)\otimes\mathcal{O}_{\mathbb{G}}(1)$ au faisceau $R^1q_*J\otimes\mathcal{O}_{\mathbb{G}}(2)$. Ce dernier faisceau est localement libre de rang 1 sur $\mathcal{V}$. En effet, si la droite L coupe C en a points on a $J_L=\mathcal{O}_L(-a)$. Or une cubique gauche a au plus des bisécantes ainsi H^1J_L est non nul si et seulement si L est bisécante à C et alors $h^1J_L=1$. Ainsi le faisceau $R^1q_*J\otimes\mathcal{O}_{\mathbb{G}}(2)$ est inversible sur $\mathcal{V}$. La présentation de R^1q_*J nous permet de dire que $R^1q_*J\otimes\mathcal{O}_{\mathbb{G}}(2)$ s'identifie à $\mathcal{O}_{\mathbb{P}(S_2)}(3)$.

Proposition 7. — *La courbe $v(X)$ est la courbe des droites bisauteuses de E''.*

Démonstration : Notons $\mathcal{G}$ le faisceau $R^1q_*p^*F_{\mathbb{F}(1,2;4)}(0,-1)\otimes\mathcal{O}_{\mathbb{G}}(1)$. Nous avons vu à la proposition précédente que ce faisceau $\mathcal{G}$ est isomorphe à $\mathcal{O}_{\mathbb{P}(S_2)}(3)$ d'où l'identification de $H^0\mathcal{G}$ à S^3S_2. Les sections de $\mathcal{G}$ et de $F(1)$ sont les mêmes et la section s de $F(1)$ nous donne une section s_0 de $\mathcal{G}$. La cubique plane X définie par s est exactement le lieu des zéros de s_0. Or nous avons la suite exacte :

$$\mathcal{O}_{\mathbf{G}}\xrightarrow{s_0}\mathcal{G}\longrightarrow R^1q_*p^*E''_{\mathbb{F}(1,2;4)}\otimes\mathcal{O}_{\mathbf{G}}(1)\longrightarrow 0$$

ce qui montre que les bisauteuses de E'' sont exactement données par $v(X)$.

Etude de la surface réglée

Pour aborder la suite de l'étude de $\mathbf{U}$, trois points de vue sont possibles : étudier les différents faisceaux E'' obtenus à partir d'une cubique gauche C et d'une cubique plane X de $\mathbb{P}(S_2)$ ou décrire la position d'une cubique plane X par rapport à une conique fixée (la conique canonique C_0 de $\mathbb{P}(S_2)$) ou encore décrire la surface S (ou $\check{S}$) et notamment préciser son modèle non singulier.

Les questions qui se posent sur E'' sont alors de savoir si E'' est réflexif ou non et de décrire son lieu singulier. Pour la position de X par rapport à C_0, dans [P2] nous avons montré que l'on a soit deux, soit un unique soit une infinité de triplets sur X associés à la conique (sommets d'un triangle de Poncelet tangent à C_0). Enfin la surface $\check{S}$ étant réglée sur une courbe elliptique

X, les résultats de [Ha1] (théorème V.2.15) vont nous permettre de dire que le faisceau $\check{K}_X$, localement libre de rang 2 sur X, est soit somme directe de deux faisceaux inversibles de degrés 3 non isomorphes, soit extension non triviale de deux faisceaux inversibles de degrés 3 isomorphes, soit somme directe de deux faisceaux inversibles de degrés 3 isomorphes.

Nous montrons que ces trois problèmes sont équivalents et que les différents cas se correspondent.

Proposition 8. — *Le faisceau $\check{K}_X$ est de l'une des deux formes suivantes :*

(ı) somme directe de deux faisceaux inversibles de degré 3

(ıı) extension non triviale d'un faisceau inversible de degré 3 *par lui même*

Démonstration : La restriction de la suite exacte tautologique de $\mathbb{G}$ à $\mathcal{V}$ nous donne :

$$0 \longrightarrow S_1 \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}(S_2)}(-1) \longrightarrow S_3 \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}(S_2)} \longrightarrow \check{K}_{\mathcal{V}} \longrightarrow 0$$

Le fibré $\check{K}_{\mathcal{V}}$ est donc un fibré de Schwarzenberger [S].

Le groupe $H^0\check{K}_X(-1)$ est nul : il s'identifie à $H^1\check{K}_{\mathcal{V}}(-4)$ qui est nul. Comme le degré de $\check{K}_X(-1)$ est nul et qu'il n'a pas de sections, ce faisceau ne peut être somme directe de deux faisceaux de degrés non nul. Le faisceau $\check{K}_X$ est donc de l'une des deux formes souhaitées ([Ha1] théorème V.2.15).

Proposition 9. — *La variété des quotients inversibles de degré* 3 *de $\check{K}_X$ s'identifie à celle des triplets de points associés à C_0 sur la cubique X.*

Démonstration : La variété des triplets de points associés à C_0 s'identifie à celle des sections de $\check{K}_{\mathcal{V}}$: les sections s'annulent exactement sur les triplets (voir par exemple [Ba] ou [P2]). Si un triplet Z est sur X alors la restriction à X nous donne une surjection $\check{K}_X \longrightarrow \mathcal{O}_X(2-Z)$, ce dernier faisceau est inversible de degré 3.

Réciproquement, soit $\mathcal{L}$ un quotient inversible de degré 3 de $\check{K}_X$. Notons $\mathcal{L}'$ le noyau de $\check{K}_X \longrightarrow \mathcal{L}$ qui est inversible de degré 3. Soit N le noyau de la composée $\check{K}_{\mathcal{V}} \longrightarrow \check{K}_X \longrightarrow \mathcal{L}$. Nous avons la suite exacte

$$0 \longrightarrow \check{K}_{\mathcal{V}}(-3) \longrightarrow N \longrightarrow \mathcal{L}' \longrightarrow 0$$

L'espace vectoriel H^0N est le noyau de la flèche de $H^0\mathcal{L}'$ dans $H^1\check{K}_{\mathcal{V}}(-3)$. Ces groupes sont de dimension respectives 3 et 2. Le faisceau N a donc au moins une section qui nous définit une section de $\check{K}_{\mathcal{V}}$ (donc un triplet Z) et ainsi une surjection $\mathcal{I}_Z(2) \longrightarrow \mathcal{L}$. La restriction de cette surjection à X nous donne alors le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathcal{O}_{Z\cap X} & \longrightarrow & \mathcal{I}_Z(2)_X & \longrightarrow & \mathcal{O}_X(2-(Z\cap X)) & \longrightarrow & 0 \\ & & & & \downarrow & & & & \\ & & & & \mathcal{L} & & & & \end{array}$$

Comme $\mathcal{L}$ est sans torsion la flèche $\mathcal{O}_{Z\cap X} \longrightarrow \mathcal{L}$ est nulle. Nous avons donc une flèche surjective de $\mathcal{O}_X(2-(Z\cap X))$ vers $\mathcal{L}$ qui doit être un isomorphisme. Le degré de $\mathcal{O}_X(2-(Z\cap X))$ est

$6-\mathrm{Card}(Z\cap X)$ et doit être égal à $\deg(\mathcal{L})$ c'est à dire 3. Ceci n'est possible que si Z est contenu dans X c'est à dire si la section correspond à un triplet sur la cubique.

Il nous reste à vérifier que cette section est uniquement déterminée. Si $h^0N\geq 2$ alors nous avons le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathcal{O}_{\mathcal{V}}^2 & \longrightarrow & \check{K}_{\mathcal{V}} & \longrightarrow & \mathcal{O}_{C_1}(2) & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & \mathcal{L}' & \longrightarrow & \check{K}_X & \longrightarrow & \mathcal{L} & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

où C_1 est une conique. Ceci est absurde car $\mathcal{L}$ est localement libre sur la cubique X alors que $\mathcal{O}_{C_1}(2)\longrightarrow\mathcal{L}$ doit être surjective.

Remarque 6. — Cette proposition nous permet de mettre en rapport la proposition 8 et les résultats de [P2]. En effet, nous avons trois cas selon que $\check{K}_X$ a deux, un seul ou une infinité de quotients inversibles de degré 3. De la même façon, nous avons sur X deux, un unique ou une infinité de triplets associés à la conique canonique. Chacun des trois cas se correspondent.

Parallèlement, les résultats de [P2] nous permettent de dire que génériquement une cubique a deux triplets en relation avec la conique canonique, qu'il existe une hypersurface irréductible de degré 6 de l'espace des cubiques où il y a un unique triplet et trois fermés irréductibles de codimension 3 et de degré respectifs 5, 30 et 12 de cubiques ayant une infinité de triplets. Les courbes générales de ces fermés sont respectivement une cubique irréductible, la réunion d'une droite et d'une conique en relation de Poncelet avec C_0 et la réunion d'une conique et d'une droite tangente à C_0.

La donnée d'un quotient de rang 3 de $\check{K}_X$ correspond à la donnée d'une section de la surface $\check{S}$. C'est une courbe elliptique de degré 3 c'est à dire une cubique plane. Il y a donc selon les cas deux, une unique ou une infinité de cubiques planes tracées sur $\check{S}$. L'intersection résiduelle de $\check{S}$ et du plan d'une telle cubique est formée de trois génératrices de la surface (les trois points du triplet sur X). De telles cubiques correspondent donc à des points triples de S, il y en a donc deux, un unique ou une infinité.

Nous étudions maintenant le faisceau E'' dans chacun de ces cas. Remarquons qu'un triplet de points associé à C_0 ou encore une section de $\check{K}_{\mathcal{V}}$ correspond à un plan H de $\check{\mathbb{P}}^3$: les trois points de $\mathcal{V}$ sont les trois bisécantes à C passant par les points de $H\cap C$. Les triplets correspondent donc aux points de $\mathbb{P}^3$. L'incidence point/droite restreinte à $\mathcal{V}$ est de degré 3 au dessus de $\mathbb{P}^3$. C'est l'incidence I entre diviseurs de degrés 2 et 3 sur $\mathbb{P}^1$ (nous noterons toujours p et q les projections).

Proposition 10. — *Un point de $\mathbb{P}^3$ est singulier pour E'' si et seulement si son triplet associé à C_0 est sur la cubique X. Ces points sont aussi le lieu triple de S.*

Démonstration : Le faisceau F est un fibré de Scharzenberger pour l'incidence entre $\mathbb{P}^2=\mathcal{V}$ et $\mathbb{P}^3$. La variété d'incidence I a la résolution suivante dans $\mathbb{P}^2\times\mathbb{P}^3$:

$$0\longrightarrow\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2\times\mathbb{P}^3}(-2,-2)\longrightarrow K_{\mathcal{V}}\otimes\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2\times\mathbb{P}^3}(0,-1)\longrightarrow\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2\times\mathbb{P}^3}\longrightarrow\mathcal{O}_I\longrightarrow 0$$

ce qui nous donne la résolution :

$$0 \longrightarrow S_2 \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(-2) \longrightarrow S_1 \otimes S_4 \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(-1) \longrightarrow S^2S_3 \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3} \longrightarrow p_*q^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(3) \longrightarrow 0$$

Cependant $F(1)$ est le noyau du morphisme de $S_1 \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(2)$ dans $S_4 \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(3)$ (cf. proposition 5) donc le complexe d'Eagon Northcott (voir par exemple [GP]) nous donne la suite exacte suivante (on note $\mathcal{O}$ pour $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}$) :

$$0 \longrightarrow S_2 \otimes \mathcal{O}(-2) \longrightarrow S_1 \otimes S_4 \otimes \mathcal{O}(-1) \longrightarrow S^2S_3 \otimes \mathcal{O} \longrightarrow S_1 \otimes \mathcal{O}(2) \xrightarrow{u} S_4 \otimes \mathcal{O}(3) \longrightarrow 0$$

où $F(1)$ est le noyau de u. Le faisceau $p_*q^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(3)$ s'identifie donc à $F(1)$ qui est alors un module inversible sur la $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}$-algèbre finie $p_*\mathcal{O}_I$. La flèche de $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}$ dans $F(1)$ est donc nulle si et seulement si celle de $p_*\mathcal{O}_I$ dans $F(1)$ est nulle. Mais alors la section de $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(3)$ définissant X nous donne le morphisme de $p_*q^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}$ dans $F(1)$ dont le conoyau est $p_*q^*\mathcal{O}_X$ (le support de ce faisceau est la surface S). Le lieu triple de ce dernier faisceau décrit les triplets de points associés à C_0 qui sont sur X. Ce lieu est donc donné par l'annulation de la flèche de $p_*\mathcal{O}_I$ dans $F(1)$ ce qui est équivalent à l'annulation de s. C'est donc le lieu singulier de E''.

Nous décrivons dans la proposition suivante le lieu singulier du faisceau E'' lorsqu'il est infini. Ceci a lieu sur trois fermés irréductibles des cubiques planes (cf. remarque 6).

Proposition 11. — *Si X est une cubique irréductible ayant une infinité de triplets associés à C_0, la réunion d'une droite et d'une conique en relation de Poncelet avec C_0 ou la réunion d'une conique et d'une droite tangente à C_0 alors le lieu singulier de E'' est une cubique gauche, une droite ou une conique.*

Démonstration : Les points singuliers de E'' sont donnés par les quotients inversibles de rang 3 de $\check{K}_X$. Or on sait que dans ce cas $\check{K}_X = \mathcal{L} \oplus \mathcal{L}$ où $\mathcal{L}$ est inversible de degré 3. Ainsi les seuls quotients possibles sont isomorphes à $\mathcal{L}$ et ces quotients sont donnés par $\mathbb{P}(\mathrm{Hom}(\mathcal{L}\oplus\mathcal{L}, \mathcal{L})) = \mathbb{P}^1$. Le lieu singulier de E'' est donc une courbe rationnelle de $\mathbb{P}^3$. Son degré est donné par le nombre de points dans un hyperplan, c'est à dire par le nombre de triplets tangents en un point fixé de la conique. Le degré est 3, 1 et 2 dans chacun des trois cas considérés.

Nous résumons les résultats obtenus sur la famille $\mathbf{U}$ dans le théorème suivant. Les résultats sur les sous variétés de $\mathbf{U}$: codimension, irréductibilité et degrés viennent de l'étude de la position d'une cubique plane par rapport à une conique fixée détaillée dans [P2]. Notons Ψ le morphisme de $\mathbf{U}$ dans $\mathfrak{H}_{3,0}$ qui à un faisceau associe sa courbe des plans instables.

Théorème 1. — *(ı) Le morphisme Ψ est surjectif. La fibre de Ψ au dessus de $C \in \mathfrak{H}_{3,0}$ est un ouvert de $\mathbb{P}(H^0\mathcal{O}_{S^2C}(3))$ la famille des cubiques du plan S^2C (dont l'image dans $\mathbb{G}$ est la famille des sextiques elliptiques de la Véronese $\mathcal{V}$ des bisécantes à C).*

(ıı) La sous-variété $\mathbf{U}'$ des faisceaux réflexifs ayant un unique point singulier est une hypersurface irréductible donnée dans chaque fibre par une hypersurface irréductible de degré 6.

(ııı) Le lieu des faisceaux non réflexifs est réunion de trois fermés irréductibles de codimension 3 donnés dans les fibres par des fermés irréductibles de degrés 5, 30 *et* 12.

Notons $\mathfrak{H}_{6,3}^d$ (resp. $\mathfrak{H}_{6,3}^2$) le localement fermé de $\mathfrak{H}_{6,3}$ (resp. $\mathfrak{H}_{6,3}^d$) des courbes réunion d'une cubique gauche irréductible et d'une cubique plane qui se coupent en trois points (resp. dont la surface des trisécantes non contenues dans le plan de la cubique porte une seule cubique plane).

Nous pouvons définir une application rationnelle r de $\mathfrak{H}_{6,3}^d$ vers $\mathbf{U}$: la cubique gauche C définit un point de $\mathfrak{H}_{3,0}$ et la cubique plane détermine une courbe elliptique de degré 6 sur la Véronese $\mathcal{V}$ des bisécantes à C. En effet, à un point de la cubique plane on associe la bisécante à la cubique gauche passant par ce point. Le théorème 1 nous permet de dire que ceci définit un élément E'' de $\mathbf{U}$. La cubique gauche C est alors la courbe des plans instables de E''.

Corollaire 3. — *L'application rationnelle r est dominante de degré 2. Elle est ramifié au dessus de $\mathbf{U}'$. L'image réciproque de $\mathbf{U}'$ est $\mathfrak{H}_{6,3}^2$.*

Démonstration : Une courbe de la fibre au dessus de E'' est réunion d'une cubique gauche C et d'une cubique plane C' la rencontrant en trois points. La cubique gauche C est la courbe des plans instables de E''. La surface des triscécantes à $C \cup C'$ (non contenues dans le plan de C') est la surface S recouverte par les droites bisauteuses de E''. La courbe C et la surface S sont donc fixées par E''. La fibre est déterminée par les cubiques planes C' tracées sur S. L'étude prédédente nous permet de dire que génériquement il y a deux telles cubiques et qu'au dessus de $\mathbf{U}'$ il y en a une unique. La fibre au dessus des trois composantes du lieu où le faisceau est non réflexif est infinie.

Lien avec les instantons de degré 3

Nous montrons le lien entre la famille $\mathbf{U}$ et les instantons de degré 3. Donnons nous, pour un faisceau $E'' \in \mathbf{U}'$ dont le lieu singulier est concentré au point P, une flèche surjective vers le faisceau du point : $E'' \longrightarrow \mathcal{O}_P$. Le noyau E est un élément de $M_{\mathbb{P}^3}(0,3,0)$. Par l'intermédiaire de la variété $\mathbf{F}$, nous déterminons un morphisme canonique $E'' \longrightarrow \mathcal{O}_P$ dont le noyau est dans le bord de $\mathbf{I}_3$. Ces faisceaux forment une composante irréductible du bord.

Pour construire les déformations nous utilisons les transformations cubo-cubiques. Nous avons vu que que la famille $\partial \mathbf{I}_3^1$ et la famille $\mathbf{U}'$ sont chacune birationnelles à des fermés du schéma de $\mathfrak{H}_{6,3}$. Le morphisme f nous permet de remonter ces courbes en des transformations cubo-cubiques. Notons $\mathbf{T}_3^t$, $\mathbf{T}_3^1$, $\mathbf{T}_3^d$ et $\mathbf{T}_3^2$ les images réciproques par f de $\mathfrak{H}_{6,3}^t$, $\mathfrak{H}_{6,3}^1$, $\mathfrak{H}_{6,3}^d$ et $\mathfrak{H}_{6,3}^2$.

Proposition 12. — *Les transformations cubo-cubiques de $\mathbf{T}_3^d$ (resp. $\mathbf{T}_3^2$) sont obtenues comme inverses de celles de $\mathbf{T}_3^t$ (resp. $\mathbf{T}_3^1$). La variété $\mathbf{T}_3^1$ (resp. $\mathbf{T}_3^2$) est l'intersection de $\pi(\mathbf{F})$ avec $\mathbf{T}_3^t$ (resp. $\mathbf{T}_3^d$). Enfin on a $\pi^{-1}(\mathbf{T}_3^1) = \mathbf{F}_3$ et $\pi^{-1}(\mathbf{T}_3^2) = \mathbf{F}_1$.*

Démonstration : Nous commençons par décrire les résolutions des idéaux des courbes des différentes sous-variétés du schéma de Hilbert.

Lemme 3. — *Soit $t \in \mathbf{T}_3^t$, il existe des bases de W et de V telles que cette application s'écrive*

comme une matrice 4×4 *(de* V *dans* W*) à coefficients dans* $\check{R}$ *sous la forme suivante :*

$$\begin{pmatrix} A & 0 \\ C & D \end{pmatrix}$$

où A *est de taille* 3×3*. De plus, on peut choisir* A *symétrique si et seulement si* $t \in \mathbf{T}_3^1$*.*

Démonstration : Soit $t \in \mathbf{T}_3^t$ et soit Y la courbe de $\mathfrak{H}_{6,3}^t$ correspondant à t. Son idéal est résolu par :

$$0 \longrightarrow R \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}(\check{V})}(-4) \xrightarrow{t} W \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}(\check{V})}(-3) \longrightarrow \mathcal{I}_Y \longrightarrow 0$$

Le point triple est donné par le deuxième idéal de Fitting de $\mathcal{I}_Y$ donc par les mineurs 2×2 de la matrice 3×4 (de R dans W) à coefficients dans $\check{V}$. Ils sont tous dans l'idéal engendré par le noyau de $H \in V$ définissant le point triple. Nous avons donc une matrice 4×4 (de V dans W) à coefficients dans $\check{R}$ de la forme voulue. Si une transformation cubo-cubiques peut s'écrire sous cette forme elle donne évidement une courbe de degré 6 et de genre 3 ayant un point triple.

De plus, la courbe Y est sur un complexe de droites si et seulement si la matrice est la multiplication du modules de Rao d'un faisceau de $\partial\mathbf{I}_3^1$ ce qui nous donne exactement la condition de symétrie (voir le paragraphe précédent : étude de $\partial\mathbf{I}_3^1$).

Lemme 4. — *Soit* $t \in \mathbf{T}_3^d$*, il existe des bases de* W *et de* V *telles que cette application s'écrive comme une matrice* 4×4 *(de* V *dans* W*) à coefficients dans* $\check{R}$ *sous la forme suivante :*

$$\begin{pmatrix} A & 0 \\ C & D \end{pmatrix}$$

où D *est de taille* 3×3*. De plus, on peut choisir* D *symétrique si et seulement si* $t \in \mathbf{T}_3^2$*.*

Démonstration : Soit $t \in \mathbf{T}_3^d$ et soit Y' la courbe correpondante qui est ACM de degré 6 et de genre 3. Son idéal vérifie :

$$0 \longrightarrow \mathcal{I}_{Y'} \longrightarrow \mathcal{I}_C \longrightarrow \mathcal{L}' \longrightarrow 0$$

où C est une cubique gauche et $\mathcal{L}'$ est supporté par une cubique plane C' rencontrant C en trois points. Les résolutions de $\mathcal{L}'$ et $\mathcal{I}_C$ sont :

$$0 \longrightarrow R \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}(\check{V})}(-4) \longrightarrow (R \oplus B) \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}(\check{V})}(-3) \xrightarrow{(a,H)} B \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}(\check{V})}(-2) \longrightarrow \mathcal{L}' \longrightarrow 0$$

et

$$0 \longrightarrow R_0 \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}(\check{V})}(-3) \longrightarrow W_0 \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}(\check{V})}(-2) \longrightarrow \mathcal{I}_C \longrightarrow 0$$

où R et B sont des espaces vectoriels de dimension 3 et R_0 et W_0 sont des espaces vectoriels de dimensions respectives 2 et 3. La flèche de $\mathcal{I}_C$ dans $\mathcal{L}'$ nous définit des flèches de W_0 dans B et de R_0 dans $R \oplus B$. Comme Y' est ACM, on a nécessairement $W_0 \simeq B$. Ceci impose que l'application de R_0 dans $R \oplus B$ est injective. Notons W le conoyau de cette injection, nous avons la résolution de l'idéal $\mathcal{I}_{Y'}$:

$$0 \longrightarrow R \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}(\check{V})}(-4) \xrightarrow{M} W \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}(\check{V})}(-3) \longrightarrow \mathcal{I}_{Y'} \longrightarrow 0$$

Enfin, comme C n'a pas de composante dans le plan de C', on voit, par restriction à ce plan, que $R_0 \cap B$ est nul dans $R \oplus B$. Ceci nous permet de dire que les flèches $R_0 \longrightarrow R$ et $W_0 \longrightarrow W$ sont injectives. En prenant des bases de R_0 et W_0 complétées en des bases de R et de W, la matrice M s'écrit :

$$\begin{pmatrix} N & * \\ 0 & H \end{pmatrix}$$

où N est la matrice de la cubique gauche et H est l'équation du plan de C'. Soit V_0 le sous-espace vectoriel de dimension 3 de V qui est le noyau de la forme linéaire $H \in \check{V}$. En prenant un base de V_0 complétée en une base de V on a une matrice de la forme voulue. Dans les notations de l'énoncé, la matrice D représente l'élément de $\check{R} \otimes \check{V}_0 \otimes W_0$. Si une transformation cubo-cubique s'écrit sous cette forme elle donne une courbe de $\mathfrak{H}_{6,3}^d$.

La courbe est dans $\mathfrak{H}_{6,3}^2$ si il y a une unique cubique plane sur la surface des trisécantes. Or nous avons vu que ceci n'est possible que si le faisceau $K(1)_X$ est extension non triviale d'un faisceau $\mathcal{L}$ par lui même qui est alors une théta-caractéristique (car $\Lambda^2 K(1)_X = \mathcal{O}_X$). La courbe X est la courbe des droites paramétrisant les trisécantes vue dans le plan des bisécantes de C.

De plus, l'application rationnelle du plan de X dans celui de C' qui a une bisécante de C associe son point d'intersection avec le plan de C' est la transformation quadratique associée aux sommets du triangle de Poncelet sur X (c'est à dire aux points définis par $\mathcal{L}$). Sa réciproque est la transformation quadratique associée aux points de $C \cap C'$. Cette application induit une bijection de X sur C'. Si $\mathcal{L}'$ est donné par la multiplication $R \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}(\check{V}_0)}(-3) \longrightarrow W_0 \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}(\check{V}_0)}(-2)$, alors $\mathcal{L}$ est donné par la multiplication $R \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}(W_0)}(-3) \longrightarrow \check{V}_0 \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}(W_0)}(-2)$. Le faisceau $\mathcal{L}$ étant une théta-caractéristique, il existe un isomorphisme entre $\check{R}$ et $\check{V}_0$ tel que la composée $V_0 \otimes V_0 \longrightarrow R \otimes V_0 \longrightarrow W_0$ se factorise par $S^2 V_0$.

Nous utilisons alors le résultat de Barth [Ba] suivant : si on a trois espaces vectoriels de dimension trois R_0, $\check{V}_0$ et W_0 et un élément de $\check{R} \otimes \check{V}_0 \otimes W_0$ tel qu'il existe un isomorphisme entre $\check{R}$ et $\check{V}_0$ tel que la composée $V_0 \otimes V_0 \longrightarrow R \otimes V_0 \longrightarrow W_0$ se factorise par $S^2 V_0$, alors il existe deux autres isomorphismes entre W_0 et $\check{V}_0$ et entre $\check{R}$ et W_0 tels que l'application $R \longrightarrow \check{V}_0 \otimes \check{V}_0$ (resp. $\check{V}_0 \longrightarrow W_0 \otimes W_0$) se factorise par $S^2 \check{V}_0$ (resp. $S^2 W_0$). Ceci n'est vrai qu'en dimension 3 car alors tous les réseaux de quadriques vérifient la condition α_3 de Barth (cf. [Ba]). Ce résultat nous permet de choisir A symétrique si et seulement si $t \in \mathbf{T}_3^2$.

Les transformations cubo-cubiques de $\mathbf{T}_3^d$ (resp. $\mathbf{T}_3^2$) sont les inverses de celles de $\mathbf{T}_3^t$ (resp. $\mathbf{T}_3^1$) car elles sont obtenues par échange des rôles de $\check{V}$ et W. De plus, on sait que $\mathbf{T}_3^1$ est l'image de $\mathbf{F}_3$ dans $\mathbf{T}_3^t$ (proposition 2) ainsi, par échange des rôles, nous voyons que $\mathbf{T}_3^2$ est l'image de $\mathbf{F}_1$ dans $\mathbf{T}_3^d$. Nous avons ici disymétrisé les rôles de W et $\check{V}$ ce qui nous donne la *dualité* entre ces deux cas.

PROPOSITION 13. — *Le complexe décrit en introduction définit un morphisme h d'un ouvert de $\mathbf{T}_3^d$ vers $M_{\mathbb{P}^3}(0,3,2)$. Ce morphisme est la composée de f avec r. L'image réciproque de $\mathbf{U}'$ est $\mathbf{T}_3^2$.*

Démonstration : Nous construisons en fait un morphisme vers $M_{\mathbb{P}^3}(0,3,2)$ à partir d'une

variété dominant birationnellement $\mathbf{T}_3^d$ ce qui nous donnera notre morphisme sur un ouvert. Considérons ainsi la sous-variété $\mathbf{F}^1$ de $\mathbf{T}\times\mathbb{P}(\mathrm{Hom}(W,\check{V}))$. Cette variété contient la projection naturelle de $\mathbf{F}_1$ comme une sous-variété de codimension 1. De plus $\mathbf{F}^1$ domine birationnellement $\mathbf{T}_3^d$. En effet, le morphisme de $\mathbf{F}^1$ vers $\mathbf{T}$ est birationnel sur son image (fait 3) qui est le $\mathbf{T}_3^d$ (lemme 4). Sur la variété $\mathbf{F}^1$ nous avons un complexe universel :

$$R\otimes\Omega^2(2)\xrightarrow{\varphi}W\otimes\Omega^1(1)\xrightarrow{\psi}\mathcal{O}_{\mathbb{P}(V)}$$

qui est injectif sur un ouvert de $\mathbf{F}^1$ et jamais surjectif. Sa cohomologie au centre nous donne un faisceau plat qui décrit un morphisme vers $M_{\mathbb{P}^3}(0,3,2)$.

Soit $t\in\mathbf{T}_3^d$, son image par f nous donne une courbe Y' de $\mathfrak{H}_{6,3}^d$. Le lemme 4 nous permet d'écrire le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & 0 & & 0 & & & & \\
 & & & & \downarrow & & \downarrow & & & & \\
 & & 0 & \longrightarrow & R_0\otimes\Omega^2(2) & \longrightarrow & W_0\otimes\Omega^1(1) & \longrightarrow & F & \longrightarrow & 0\\
 & & & & \downarrow & & \downarrow & & & & \\
 & & 0 & \longrightarrow & R\otimes\Omega^2(2) & \longrightarrow & W\otimes\Omega^1(1) & \longrightarrow & Q & \longrightarrow & 0\\
 & & & & \downarrow & & \downarrow & & & & \\
0 & \longrightarrow & \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(-1) & \longrightarrow & \Omega^2(2) & \xrightarrow{v} & \Omega^1(1) & \longrightarrow & \mathcal{I}_P & \longrightarrow & 0\\
 & & & & \downarrow & & \downarrow & & & & \\
 & & & & 0 & & 0 & & & &
\end{array}$$

où le faisceau F est le fibré de Schwarzenberger associé à la cubique gauche (cf. proposition 5) et v est l'équation du plan H de $\check{\mathbb{P}}^3$ qui correspond à un point P de $\mathbb{P}^3$. Le lemme du serpent nous donne la suite exacte suivante $0\longrightarrow\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(-1)\longrightarrow F\longrightarrow Q\longrightarrow\mathcal{I}_P\longrightarrow 0$. La construction par le complexe nous dit que $E''(1)$ est le noyau de $Q\longrightarrow\mathcal{I}_P$ alors que nous savons que l'image de r est donnée par le conoyau de $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(-1)\longrightarrow F$.

Nous calculons maintenant la limite d'une famille d'instantons dont le terme dans $\mathbf{F}$ tend vers un élément t_0 de $\mathbf{F}_1$. Soit donc A un anneau de valuation discrète de corps résiduel k et t_A un A-point de $\mathbf{F}$ dont le point générique t_g est dans $\mathbf{F}_4$ et le point spécial t_0 est assez général dans $\mathbf{F}_1$. Soit $\mathcal{E}$ la famille plate obtenue à partir de t_A et du morphisme g.

PROPOSITION 14 . —Le bidual E'' du faisceau limite E de $\mathcal{E}$ est le faisceau de $M_{\mathbb{P}^3}(0,3,2)$ donné par $h\circ\pi(t_0)$.

Démonstration : On construit la monade $R\otimes\Omega^2(2)_A\longrightarrow W\otimes\Omega^1(1)_A\longrightarrow\mathcal{I}_{A.P}$ (où $\mathcal{I}_{A,P}$ est l'idéal dans $\mathbb{P}_A^3$ du point $P\in\mathbb{P}_k^3$) obtenue à partir du point t_A. Le faisceau $\mathcal{E}$ est la cohomologie au centre de cette monade. Les hypothèses de généricité nous permettent de dire que la première flèche horizontale est injective même au point spécial ce qui nous permet de

conclure à la platitude de $\mathcal{E}$. La monade au point spécial est :

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & 0 & & 0 & & \\
 & & & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & R\otimes\Omega^2(2) & \longrightarrow & K & \longrightarrow & E(1) & \longrightarrow & 0 \\
 & & \| & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & R\otimes\Omega^2(2) & \longrightarrow & W\otimes\Omega^1(1) & \longrightarrow & Q & \longrightarrow & 0 \\
 & & & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & & & \mathcal{L} & = & \mathcal{L} & & \\
 & & & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & & & 0 & & 0 & &
\end{array}$$

où $\mathcal{L}$ est une extension de $\mathcal{I}_P$ par $\mathcal{O}_P$. Le bidual de $E(1)$ est évidement donné par le noyau de la flèche $Q \longrightarrow \mathcal{I}_P$ déduite de $Q \longrightarrow \mathcal{L}$ ce qui nous dit qu'il est donné par $h\circ\pi(t_0)$.

Remarquons que le faisceau $\mathcal{L}$ est une extension triviale c'est à dire est isomorphe à $\mathcal{I}_P\oplus\mathcal{O}_P$. En effet, cette extension est donnée par $\mathcal{I}_{A,P}\otimes k$.

Soit $E''\in\mathbf{U}$, soient φ et ψ au dessus de E'' dans $\mathbf{F}^1$. Ces morphismes correspondent au choix d'un élément dans la fibre de r (il y a, à priori, deux choix mais si $E''\in\mathbf{U}'$ il n'y aura pas d'ambiguité) puis d'un élément de $PGL(R)\times PGL(W)$. Soit Q le conoyau de la flèche $R\otimes\Omega^2(2)\xrightarrow{\varphi} W\otimes\Omega^1(1)$. Le faisceau E'' est le noyau de la surjection $Q\longrightarrow\mathcal{I}_P$ déduite de ψ. Nous avons donc une flèche $\mathrm{Hom}(E'',\mathcal{O}_P)\longrightarrow\mathrm{Ext}^1(\mathcal{I}_p,\mathcal{O}_P)$. La proposition précédente nous dit que pour qu'il existe une flèche s de E'' dans $\mathcal{O}_P$ dont le noyau est un faisceau du bord de $\mathbf{I}_3$, il faut que l'image de s dans $\mathrm{Ext}^1(\mathcal{I}_p,\mathcal{O}_P)$ soit nulle. Notons $(*)$ cette condition.

Proposition 15. — *Un faisceau $E''\in\mathbf{U}$ vérifie la condition $(*)$ si et seulement si $E''\in\overline{\mathbf{U}'}$. Sur $\mathbf{U}'$, il existe un unique élément de $\mathrm{Hom}(E'',\mathcal{O}_P)$ nul dans $\mathrm{Ext}^1(\mathcal{I}_p,\mathcal{O}_P)$. Cet élément nous définit un morphisme α de $\mathbf{U}'$ dans $M_{\mathbb{P}^3}(0,3,0)$ birationnel sur son image.*

Démonstration : Le faisceau E'' est le noyau de la surjection $Q\longrightarrow\mathcal{I}_P$ déduite de ψ. Le point P détermine un sous-espace vectoriel V_0 de dimension 3 de V et ψ détermine un sous-espace vectoriel $W_0=\mathrm{Ker}\psi$ de dimension 3 de W et un quotient W_1 de rang 1. On a la suite exacte :

$$0\longrightarrow\check{V}_0\longrightarrow\mathrm{Hom}(Q,\mathcal{O}_P)\longrightarrow\mathrm{Hom}(E'',\mathcal{O}_P)\longrightarrow\mathrm{Ext}^1(\mathcal{I}_p,\mathcal{O}_P)$$

Nous allons montrer que selon que ψ' existe ou non (i.e. selon que $E''\in\overline{\mathbf{U}'}$ ou non), l'espace $\mathrm{Hom}(Q,\mathcal{O}_P)$ est de dimension 4 ou 3 et qu'ainsi il existe ou non un élément de $\mathbb{P}(\mathrm{Hom}(E'',\mathcal{O}_P))$ qui donne une extension triviale de $\mathcal{I}_p$ par $\mathcal{O}_P$.

La définition de Q nous permet de donner la suite exacte suivante :

$$0\longrightarrow\mathrm{Hom}(Q,\mathcal{O}_P)\longrightarrow\check{W}\otimes\check{V}_0\longrightarrow\check{R}\otimes V_0\longrightarrow\mathrm{Ext}^1(Q,\mathcal{O}_P)\longrightarrow 0$$

où la flèche centrale est la composée :

$$\check{W}\otimes\check{V}_0\xrightarrow{\varphi}\check{R}\otimes\check{V}\otimes\check{V}_0\longrightarrow\check{R}\otimes\check{V}_0\otimes\check{V}_0\longrightarrow\check{R}\otimes\Lambda^2\check{V}_0\longrightarrow\check{R}\otimes V_0$$

L'espace vectoriel $\check{W}_1 \otimes \check{V}_0$ est donc contenu dans $\mathrm{Hom}(Q, \mathcal{O}_P)$. Pour savoir si le noyau est réduit à cet espace ou est de dimension supérieure à trois il faut étudier la flèche réduite qui est la composée : $\check{W}_0 \otimes \check{V}_0 \longrightarrow \check{R} \otimes \check{V}_0 \otimes \check{V}_0 \longrightarrow \check{R} \otimes \Lambda^2 \check{V}_0 \longrightarrow \check{R} \otimes V_0$. Cette flèche est non bijective si l'image de $\check{W}_0 \otimes \check{V}_0$ dans $\check{R} \otimes \check{V}_0 \otimes \check{V}_0$ rencontre $\check{R} \otimes S^2 \check{V}_0$ c'est à dire exactement si on peut trouver un morphisme de W_0 dans $\check{V}_0$ qui rend la flèche φ symétrique. Ceci est exactement la condition d'appartenance à $\overline{\mathbf{U}'}$. Si le faisceau E est dans l'image de α, alors on retrouve E'' qui est le bidual de E.

Remarquons qui si on est dans un des trois fermés de codimension 3 de $\mathbf{U}$ pour lesquels E'' est non réflexif, alors le choix du morphisme de E'' dans $\mathcal{O}_P$ n'est plus canonique (on a un $\mathbb{P}^1$ d'éléments qui donnent une extension triviale de $\mathcal{I}_P$ par $\mathcal{O}_P$). Le morphisme α n'est donc pas défini sur ces fermés.

Nous montrons enfin que le morphisme obtenu par composition de $h \circ \pi$ de $\mathbf{F}_1$ dans $\mathbf{U}'$ avec α définit un morphisme de $\mathbf{F}_1$ dans $M_{\mathbb{P}^3}(0,3,0)$ qui prolonge g sur $\mathbf{F}_1$. Pour ceci, nous montrons que pour toute famille d'instantons $\mathcal{E}$ construite comme pour la proposition 14, la limite E est l'image de t_0 par $\alpha \circ h \circ \pi$.

Corollaire 4. — *L'image de $\mathbf{F}_1$ par $\alpha \circ h \circ \pi$ est une variété irréductible $\partial\mathbf{I}_3^2$ de $M_{\mathbb{P}^3}(0,3,0)$ qui est dans le bord de $\mathbf{I}_3$. Ce morphisme prolonge le morphisme g sur $\mathbf{F}_1$.*

Démonstration : Soit $\mathcal{E}$ une famille d'instantons construite comme pour la proposition 14. Soit E le faisceau limite et E'' son bidual. Nous avons vu que E'' est $h \circ \pi(t_0)$ et que E est le noyau d'une flèche $s \in \mathrm{Hom}(E'', \mathcal{O}_P)$ qui s'annule dans $\mathrm{Ext}^1(\mathcal{I}_P, \mathcal{O}_P)$. Mais alors ceci impose (proposition 15) que $E'' \in \mathbf{U}'$ (car t_0 est assez général) et que le faisceau E est exactement $\alpha(E'')$.

Réciproquement, si E est général dans l'image de α, alors son bidual E'' est général dans $\mathbf{U}'$ et l'élément t_0 correspondant peut être choisit général. Nous pouvons alors construire la déformation comme pour la proposition 14 dont la limite est E.

Remarquons que ce morphisme est défini par un faisceau universel sur $\mathbf{F}_1$. En effet, sur $\mathbf{F}_1$, le morphisme $h \circ \pi$ à valeur dans $M_{\mathbb{P}^3}(0,3,2)$ est défini par le faisceau universel $\mathbf{E}''$ donné sur $\mathbf{F}_1 \times \mathbb{P}^3$ par la cohomologie au centre du complexe

$$R \otimes \Omega^2(2) \longrightarrow W \otimes \Omega^1(1) \longrightarrow \mathcal{O}$$

Au dessus du localement fermé $\mathbf{U}'$ de $\mathbf{U}$, si on note Z le fermé $\mathbf{U}' \times \mathbb{P}^3$ défini par le lieu singulier, le noyau de la flèche de fibrés $\mathcal{H}om(\mathbf{E}'', \mathcal{O}_Z) \longrightarrow \mathcal{E}xt^1(\mathcal{I}_Z, \mathcal{O}_Z)$ est inversible. Ce faisceau nous donne une section de $\mathbf{U}'$ dans le fibré $\mathcal{H}om(\mathbf{E}'', \mathcal{O}_Z)$ et le noyau $\mathbf{E}$ de la flèche universelle $\mathbf{E}'' \longrightarrow \mathcal{O}_Z$ est le faisceau recherché.

Remarque 7. — Nous décrivons ici plus précisément la conjecture de L. Gruson et G. Trautmann. Nous donnons également quelques résultats complémentaires sur cette conjecture.

La conjecture affirme que tous les faisceaux E du bord de $\mathbf{I}_3$ sont sans torsion non localement libres. Deux cas se présentent selon que le bidual E'' du faisceau E est localement libre ou non.

Dans le premier cas (type 1), le lieu singulier de E est une courbe de degré inférieur ou égal à 3. Dans le second cas (type 2), le bidual est seulement réflexif et on conjecture que le lieu singulier d'un faisceau général E est concentré en un point. Le bord de $\mathbf{I}_3$ aurait alors quatre composantes de chaque type.

Les courbes associées aux faisceaux de type 1 seraient : une droite, une cubique gauche (ces deux cas apparaissent dans [GS]), une conique (c'est le cas de $\partial\mathbf{I}_3^1$ que nous traitons ici) et une cubique plane (ce cas peut être obtenu par "déformation par homothétie").

Les quatres composantes de type 2 correspondraient à des faisceaux réflexifs de troisième classe de Chern vallant 2, 4, 6 ou 8. Nous traitons ici le cas $c_3 = 2$ (variété $\partial\mathbf{I}_3^2$). Des faisceaux appartenant aux cas $c_3 = 4$ ou 6 peuvent être obtenus par "déformation de courbes" et pour $c_3 = 8$ par "déformation par homothétie".

Concernant la conjecture de L. Gruson et G. Trautman sur le bord de $\mathbf{I}_3$, nous savons construire sept composantes irréductibles en codimension 1 sur les huit prédites. L'existence de la composante du second type correspondant à $c_3 = 6$ est plus incertaine : nous savons construire des familles de tels faisceaux mais qui sont en codimension au moins 2.

4 Quelques situations géométriques associées

Nous décrivons dans ce paragraphe deux applications géométriques des résultats précédents. Nous donnons une paramétrisation de l'espace des modules des courbes de degré 7 et de genre 2. Nous exhibons une famille $\mathfrak{I}$ de dimension 36 d'involutions birationnelles de $\mathbb{P}^3$ et nous donnons une représentation birationnelle de cette famille.

Espace des modules des courbes de degré 7 et de genre 2

Notons $\mathfrak{H}_{7,2}$ le schéma de Hilbert des courbes de degré 7 et de genre 2 de $\mathbb{P}^3$. Nous avons vu dans l'exemple 1 que si Y est une courbe de degré 7 et de genre 2 irréductible et lisse alors le groupe $\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}}(\mathcal{I}_Y(2), \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(-2)) = H^0\omega_Y$ est de dimension 2. Ainsi il existe un pinceau d'extensions non nulles. Chacune de ces extensions donne un faisceau $E'' \in \mathbf{U}_0$ qui est réflexif. La remarque 4 nous permet alors de dire que le faisceau F déduit de E'' grâce à la suite spectrale de Beilinson est localement libre et donc associé à une cubique gauche irréductible C (proposition 5). Le faisceau E'' est alors dans l'ouvert $\mathbf{U}$. La flèche naturelle de $F(1)$ dans $\mathcal{I}_Y(4)$ (qui se factorise par $E''(2)$) nous donne la suite exacte :

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}^2 \longrightarrow F(1) \longrightarrow \mathcal{I}_Y(4) \longrightarrow 0 \quad (*)$$

Cette construction est indépendante du choix de l'extension et nous permet de définir un morphisme Φ de $\mathfrak{H}_{7,2}$ dans $\mathfrak{H}_{3,0}$ le schéma de Hilbert des cubiques gauches irréductibles qui a la courbe Y associe la cubique gauche C qui définit F.

Proposition 16. — *La fibre de Φ au dessus d'une courbe $C \in \mathfrak{H}_{3,0}$ est birationnellement isomorphe à $\mathbb{G}(2, H^0\mathcal{O}_{S^2C}(3))$ la variété des pinceaux de cubiques du plan S^2C.*

Démonstration : Soit donc $C \in \mathfrak{H}_{3,0}$. La donnée de $Y \in \mathfrak{H}_{7,2}$ au dessus de C nous permet de définir un élément de $\mathbb{G}(2, H^0\mathcal{O}_{S^2C}(3))$ grâce à la suite exacte $(*)$. Réciproquement, soit un morphisme $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}^2 \longrightarrow F(1)$ donné par un élément de $\mathbb{G}(2, H^0\mathcal{O}_{S^2C}(3))$. Fixons un point de ce pinceau $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3} \longrightarrow F(1)$. Le conoyau est alors un faisceau $E'' \in \mathbf{U}$ et on a une suite exacte :

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3} \longrightarrow E''(2) \longrightarrow \mathcal{I}_Y(4) \longrightarrow 0$$

qui nous définit une courbe Y de degré 7 et de genre 2 qui est indépendente du point du pinceau fixé. Le faisceau $E''(2)$ est régulier au sens de Castelnuovo-Mumford et pour un pinceau général, la courbe Y est lisse.

Remarque 8. — L'espace des modules des courbes de degré 7 et de genre 2 de $\mathbb{P}^3$ est le quotient par PGL_4 de $\mathfrak{H}_{7,2}$. Le schéma $\mathfrak{H}_{3,0}$ n'a qu'une orbite sous PGL_4 (il est isomorphe au quotient PGL_4/PGL_2) donc l'espace des modules est birationnellement isomorphe au quotient par PGL_2 de la variété $\mathbb{G}(2, S^3S_2)$ des pinceaux de cubiques du plan $\mathbb{P}(S_2)$.

Nous pouvons à partir du pinceau retrouver le modèle non singulier de la courbe : nous avons une droite $\mathbb{P}^1$ dans $\mathbb{P}(S^3S_2)$, la courbe Y est un revêtement double au dessus. En effet, si nous choisissons un point de $\mathbb{P}^1$, c'est à dire une section de $F(1)$, elle détermine $E''(2)$ et donc deux points de Y donnés par les deux points singuliers de E''. Ce sont les deux points où la section de ω_Y définissant E'' s'annule. Quand on fait varier le point de $\mathbb{P}^1$, on fait varier le faisceau E'' c'est à dire l'élément de $H^0\omega_Y$. On recouvre de cette façon tout Y. Le revêtement double de Y au dessus de $\mathbb{P}^1$ est donné par le $\mathbf{g}_2^1$ défini par ω_Y. Les points de ramification de ce morphisme apparaissent quand la section de ω_Y s'annule doublement en un point. Ceci correspond exactement aux faisceaux de $\mathbf{U}'$ ou encore aux cubiques ayant un unique triplet associé à la conique canonique. L'image des points de ramification est donc formée par l'intersection du pinceau $\mathbb{P}^1$ avec la variété des cubiques ayant un unique triplet. La formule d'Hürwitz nous permet de retrouver le fait que le degré de cette dernière variété est 6. La courbe abstraite paramétrisant Y est le revêtement double de $\mathbb{P}^1$ ramifié aux 6 points d'intersection du pinceau et de cette variété.

Involutions birationnelles de $\mathbb{P}^3$

Les involutions du plan projectif $\mathbb{P}^2$ sont géométriquement connues depuis longtemps (voir par exemple [Be]) mais la preuve rigoureuse de leur classification est plus récente. A. Beauville et L. Bayle [BB] ont donné une preuve simplifiée de ce résultat en utilisant la théorie de Mori. Dans $\mathbb{P}^3$, il ne semble pas qu'il existe, comme dans le cas de $\mathbb{P}^2$, une classification des involutions birationnelles. Je décris ci-dessous une famille de telles involutions.

Fait 5. — *Toute courbe de degré 9 et de genre 6 définit une involution birationnelle de $\mathbb{P}^3$. La famille d'involutions $\mathfrak{I}$ ainsi construite est birationnelle au schéma $\mathfrak{H}_{9,6}$ des courbes de degré 9 et de genre 6.*

Démonstration : Considérons une courbe X de degré 9 et de genre 6 générale, elle est toujours sur quatre quartiques (i.e. $H^0\mathcal{I}_X(4)$ est de dimension 4). Prenons trois de ces quartiques, l'inter-

section résiduelle à X est formée de deux points. Nous décrivons ainsi une famille de dimension 3 (birationnelle à $\mathbb{P}(H^0\mathcal{I}_X(4))$ ce qui définit une involution.

La courbe de degré 9 et de genre 6 est le lieu où l'involution n'est pas définie. Le schéma de Hilbert $\mathfrak{H}_{9,6}$ des courbes de degré 9 et de genre 6 paramétrise donc birationnellement cette famille d'involutions. Nous voyons ainsi apparaitre une famille à 36 paramètres d'involutions de $\mathbb{P}^3$.

Remarques 9. — *(ı)* Ces involutions sont liées à notre situation de la façon suivante : prenons deux quartiques contenant X (i.e. un sous espace vectoriel U de dimension 2 de $H^0\mathcal{I}_X(4)$), l'intersection résiduelle est une courbe Y de degré 7 et de genre 2. Lorsqu'on fait varier une troisième quartique dans le pinceau $\mathbb{P}(H^0\mathcal{I}_X(4)/U)$, celle-ci découpe sur Y un $\mathbf{g}_2^1$ qui détermine exactement le revêtement double de Y au dessus de $\mathbb{P}^1$ défini au paragraphe précédent.

(ıı) Le quotient de $\mathbb{P}^3$ par une involution de la famille $\mathfrak{I}$ est rationnel. Il est birationnel à $\mathbb{P}(H^0\mathcal{I}_X(4))$: si P est un point de $\mathbb{P}^3$ en dehors de X alors on lui associe l'ensemble des quartiques contenant X et P qui est un sous-espace de codimension 1 de $H^0\mathcal{I}_X(4)$. Réciproquement, un sous-espace de dimension 3 de $H^0\mathcal{I}_X(4)$ détermine deux points points de $\mathbb{P}^3$ comme intersection résiduelle de X.

Nous allons maintenant décrire birationnellement cette famille d'involutions modulo PGL_4 ou encore l'espace des modules des courbes de degré 9 et de genre 6 de $\mathbb{P}^3$.

Soit X une courbe de degré 9 et de genre 6 de $\mathbb{P}^3$. Nous lui associons une cubique gauche C de $\check{\mathbb{P}}^3$: l'ensemble des plans H tels que $X \cap H$ est formé de 9 points situés sur un pinceau de cubiques est une cubique gauche C de $\check{\mathbb{P}}^3$. Ceci nous permet de définir un morphisme Ψ de $\mathfrak{H}_{9,6}$ vers $\mathfrak{H}_{3,0}$.

Proposition 17. — *La fibre du morphisme Ψ au dessus d'une courbe $C \in \mathfrak{H}_{3,0}$ est isomorphe à $\mathbb{G}(4, H^0\mathcal{O}_{S^2C}(3))$ la variété des sous-espaces de dimension 4 de cubiques du plan S^2C.*

Démonstration : À une cubique gauche C nous pouvons associer le fibré de Schwarzenberger F et réciproquement (cf. proposition 5). Nous avons vu qu'alors $\check{V}$ s'identifie à S_3 et $H^0F(1)$ à S^3S_2 (c'est à dire les cubiques du plan S^2C). Prenons un sous-espace vectoriel de dimension 4 de $H^0F(1)$. Nous pouvons former la flèche suivante : $\check{F}(-5) \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(-4)^4$ dont le conoyau est l'idéal $\mathcal{I}_X$ d'une courbe de degré 9 et de genre 6.

Réciproquement, si X est une courbe de degré 9 et de genre 6 de $\mathbb{P}^3$ nous avons la résolution :

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(-7)^2 \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(-6)^5 \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(-4)^4 \longrightarrow \mathcal{I}_X$$

Nous pouvons alors considérer le faisceau $\check{F}(-4)$ conoyau de la première flèche. C'est un fibré de Schwarzenberger (du type de la proposition 5) associé à la cubique gauche C de $\check{\mathbb{P}}^3$ définie par l'ensemble des plans H tels que $X \cap H$ est formé de 9 points situé sur un pinceau de cubiques.

Remarque 10. — Les transformations cubo-cubiques associées aux instantons sont involutives. Elles définissent donc également des involutions birationnelles de $\mathbb{P}^3$. Considérons un réseau R

de quadriques. Soit P un point de $\mathbb{P}^3$, son image par l'involution est le point P' orthogonal à P pour toutes les formes quadratiques du reseau R. Si L est la droite qui joint P à P', alors le reseau R se restreint sur L en une famille de dimension 2 de formes quadratiques (sinon il n'existe pas de point P' sur L qui est orthogonal à P pour toutes les formes quadratiques. Ceci signifie que la droite L est contenue dans au moins une quadrique du réseau.

Réciproquement, si L une droite contenue dans une quadrique du réseau, la restriction de R à L définit un pinceau de formes quadratiques. L'othogonal de ce pinceau est une forme quadratique qui a deux points isotropes. Ils sont reliés par l'involution.

Nous avons donc montré que *le quotient de* $\mathbb{P}^3$ *par l'involution associée à* R *est la variété des droites contenue dans une des quadriques de* R. *C'est un complexe cubique de droites.*

On peut facilement vérifier que ce complexe cubique de droites est un fibré en coniques (toutes non singulières) au dessus d'une surface de Del Pezzo de degré 2 (revêtement double du plan $\mathbb{P}(R)$ ramifié au dessus de la quartique correspondant aux cônes). Ce fibré en coniques ne semble pas avoir de section, je ne sais pas si il est rationnel ou seulement unirationnel.

Références

[Ba] *Wolf Barth* : Moduli of vector bundles on the projective plane, Invent. Math. 42 (1977).

[BB] *Lionel Bayle et Arnaud Beauville* : Birational involutions of $\mathbb{P}_2$. Kodaira's issue, Asian J. Math. 4 (2000), no. 1.

[Be] *Eugenio Bertini* : Ricerche sulle transformazioni univoche involutorie nel piano. Annali di Mat. 8, 224-286 (1877).

[ES1] *Geir Ellingsrud et Stein Arild Strømme* : Stable rank-2 vector bundles on $\mathbb{P}^3$ with $c_1 = 0$ and $c_2 = 3$, Math. Ann. 255 (1981).

[ES2] *Geir Ellingsrud et Stein Arild Strømme* : On the Chow ring of a geometric quotient. Ann. of Math. (2) 130 (1989), no. 1.

[FH] *William Fulton et Joe Harris* : Representation Theory, GTM Springer Verlag 129 (1991).

[GP] *Laurent Gruson et Christian Peskine* : Courbes de l'espace projectif : variétés de sécantes, Enumerative Geometry and Classical Algebraic Geometry. Boston, Basel, Stuttgart : Birkhäuser (1982).

[GS] *Laurent Gruson et Mohamed Skiti* : 3-instantons et réseaux de quadriques, Math. Ann. 298 (1994).

[Ha1] *Robin Hartshorne* : Algebraic geometry, GTM Springer Verlag 52 (1977).

[Ha2] *Robin Hartshorne* : Stable Reflexives sheaves, Math. Ann. 254 (1980).

[NT] *Mudumbai S. Narasimhan et Günther Trautmann* : Compactification of $\mathbf{M}_{\mathbb{P}^3}(0,2)$ and Poncelet pairs of conics. Pacific J. Math. 145 (1990), no. 2.

[OSS] *Christian Okonek, Michael Schneider et Heinz Spindler* : Vector bundles on complex projective spaces, Basel, Boston, Stuttgart : Birkhäuser (1980).

[P1] *Nicolas Perrin* : Une composante du bord des instantons de degré 3, CRAS série I 330 (3) (2000).

[P2] *Nicolas Perrin* : Lieu singulier des surfaces rationnelles. Prép. math.AG/0101083 (2001).

[P3] *Nicolas Perrin* : Courbes rationnelles sur les variétés homogènes et une désingularisation plus fine des variétés de Schubert. Prép. math.AG/0003199 (2000).

[R] *Prabhakar A. Rao* : A family of vector bundles on $\mathbb{P}^3$, LNM 1266 (1985).

[Ro] *Maxwell Rosenlicht* : A remark on quotient spaces, An. Acad. Brasil. Ci. 35 (1963).

[RS] *Leonard Roth et John G. Semple* : Introduction to algebraic geometry, Oxford Science Publications (1949).

[S] *Rolf L. E. Schwarzenberger* : Vector bundles on the projective plane, Proc. London Math. Soc. (3) 11 (1961).

[Sk] *Mohamed Skiti* : Espace de module des fibrés vectoriels et groupe de Picard, en préparation.

[V] *Jean Valles* : Nombre maximal d'hyperplans instables pour un fibré de Steiner, Math. Zeit. 233 (2000).